UNIDAD

1 Sucesiones y progresiones

Capacidades

Analiza sucesiones presentes en conjuntos estudiados.
Sucesión. Concepto.
Clasificación: Creciente, decreciente, constante.
Término general.
Formula y resuelve situaciones problemáticas donde se apliquen conceptos de progresiones aritméticas y geométricas.
Término n – ésimo.
Número de términos.
Razón.
Primer término.
Suma de “n” términos.

NÚMEROS DE FIBONACCI

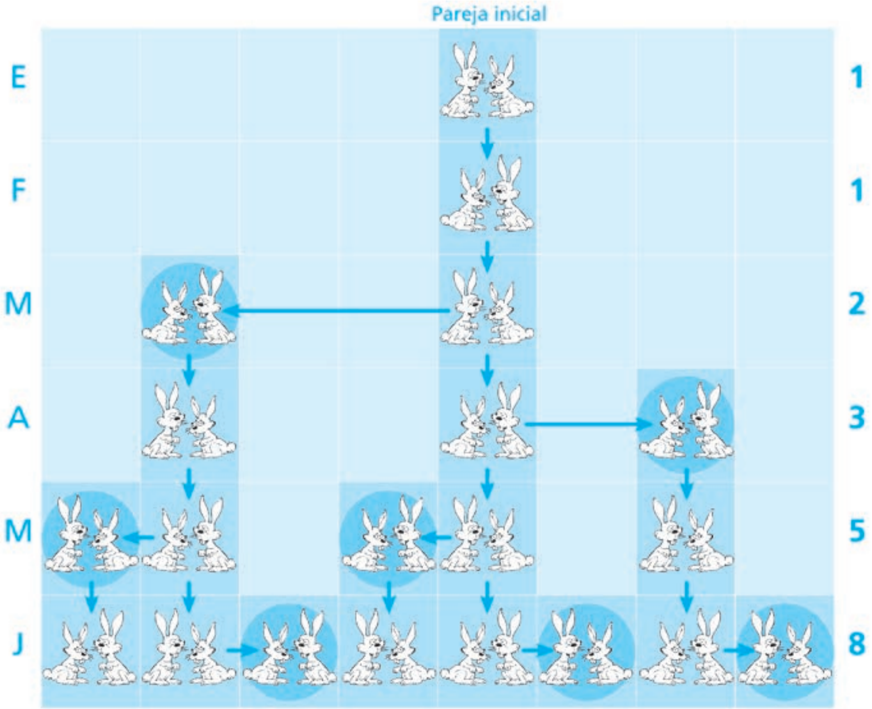
Leonardo Fibonacci nació en Pisa (1170-1230). Destacado matemático de la Edad Media, publicó en su libro *LiberAbaci* el siguiente problema, donde lo fascinante no es la repuesta sino la sucesión que aparece al tratar de encontrar la respuesta.

¿Cuántos conejos puede producir una sola pareja en un año, si todos los meses cada pareja engendra una nueva pareja, la cual comienza a engendrar a partir del segundo mes, y así sucesivamente suponiendo que no se produce ninguna muerte? El diagrama de abajo muestra cómo el número de parejas vivas cada mes forma una sucesión.

Los números de esta sucesión se conocen como números de Fibonacci, que tienen la particularidad de que cada nuevo número en la sucesión se encuentra al sumar los dos números anteriores, es decir:

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + a_{n-2}}$$

Fuente: Vizmanos, J., 1995.



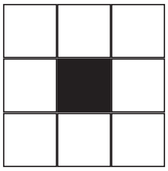
La sucesión de parejas formadas en 1 año es la siguiente:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

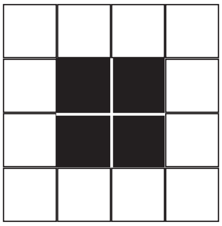
$\boxed{S_n = 870 \text{ conejos en un año.}}$

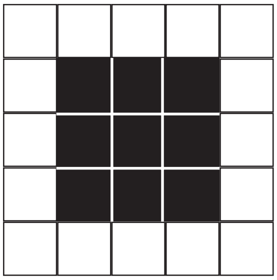
1.1. Sucesiones o secuencias. Elementos

* Presentamos la siguiente situación:

Podemos observar que las baldosas que forman el mosaico del patio del colegio están organizadas con diferentes combinaciones. Veremos las que están ordenadas de la siguiente manera para conocer cuántas baldosas blancas y negras hay en cada mosaico y expresar sus resultados generalizando.







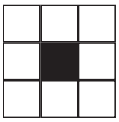
* Comprendemos el problema:

- ¿Qué nos informa la situación? El número de baldosas blancas y negras que existen en cada mosaico.
- ¿Qué queremos saber? El término general de una sucesión.

Concebimos un plan de solución:

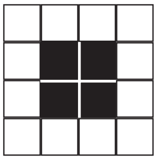
Formamos la sucesión de los bordes del cuadrado negro analizando los siguientes gráficos:

- En el cuadrado negro 1 x 1, sobre los lados encontramos otros cuadrados blancos bordeándolos. Así tenemos:



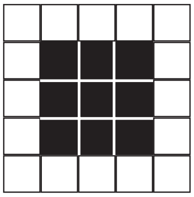
1 baldosa negra y 8 baldosas blancas

- En el cuadrado negro 2 x 2, de la misma manera obtenemos:



4 baldosas negras y 12 baldosas blancas

- En el cuadrado 3 x 3, queda así:



9 baldosas negras y 16 baldosas blancas

* Ejecutamos el plan:

Resumimos lo observado colocando en una tabla para expresar en forma de sucesión y llegar al término general.

Nº de orden	■	□
1	1	8
2	4	12
3	9	16
4	16	20
5	25	24
n	n x n	4n + 4

4 4 4 4 → Diferencia entre términos

→ Términos generales

Las expresiones algebraicas:

n x n representan los cuadrados perfectos (1, 4, 9, 16,...).
4n + 4 expresan la sucesión (8, 12, 16, ...).

Ejemplo:

Para $n = 1$ 4 . 1 + 4 = 8
$n = 2$ 4 . 2 + 4 = 12

Expresamos en forma de sucesión:

1, 4, 9, 16, 25,... n x n → Sucesión de baldosas negras
8, 12, 16, 20, 24,... 4n + 4 → Sucesión de baldosas blancas

Analizamos la tabla y contestamos:

a. ¿Qué número de baldosas negras necesitaré para 52 baldosas blancas?

$4n + 4 = 52$

$4n = 52 - 4$

$4n = 48 \quad \rightarrow n = \frac{\cancel{48}}{\cancel{4}} = \boxed{12; \text{ o sea 144 baldosas negras.}}$

b. Si tenemos 225 baldosas negras, ¿cuántas baldosas blancas necesitaremos?

Como $n \times n = 225 \rightarrow n = \sqrt{225} = 15$

$\boxed{4 \,.\, 15 + 4 = 64 \text{ baldosas blancas.}}$

* Examinamos la solución:

- ¿Podemos emplear el método desarrollado en algún otro caso? Sí, podemos emplear esta estrategia en otros problemas de sucesión.

Así como en el ejemplo anterior, encontramos con regularidad situaciones que denotan sucesiones o secuencias como:

1. los meses del año: enero, febrero, marzo,... y diciembre.
2. los días de la semana: domingo, lunes, martes,... y sábado.
3. las estaciones del año: primavera, verano, otoño e invierno.
4. los números naturales: 0, 1, 2, 3, 4...

En todos estos ejemplos observamos un cierto orden en sus elementos o términos. Así en el conjunto de los días de la semana el primer término es domingo, el segundo lunes, el séptimo término sábado.

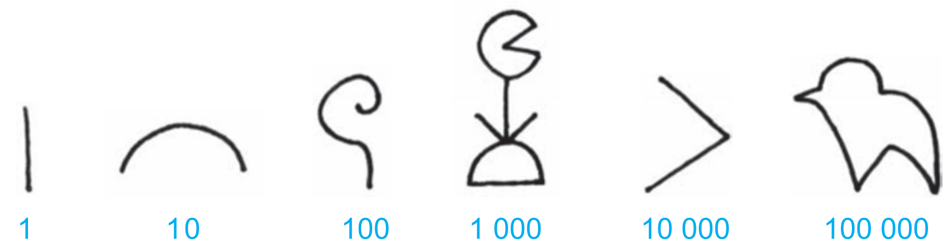
Una **sucesión numérica** es un conjunto ordenado de números reales. Se representa por $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots) = (a_n)$, donde el subíndice representa el lugar de orden que ocupa el término.

1.2. Sucesiones finitas e infinitas

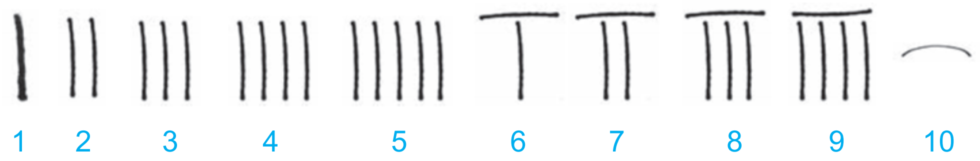
Los ejemplos1, 2, y 3 de la página anterior constituyen sucesiones finitas porque constan de un determinado número de términos. La sucesión de los números naturales como el ejemplo 4 es infinita, porque consta de infinitos términos.

Las sucesiones numéricas descubiertas por los hombres a lo largo de la historia están representadas por las siguientes sucesiones de números naturales.

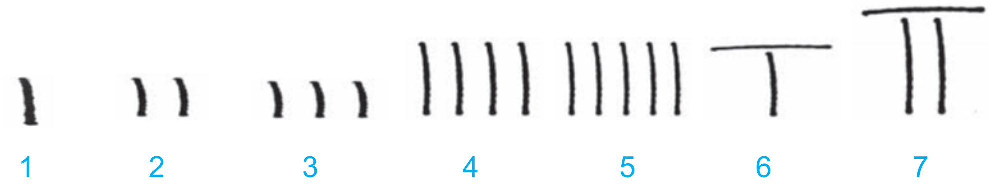
En las sucesiones numéricas de los egipcios, hace 5 000 años utilizaban números que son jeroglíficos; este sistema permaneció alrededor de 2 000 años.



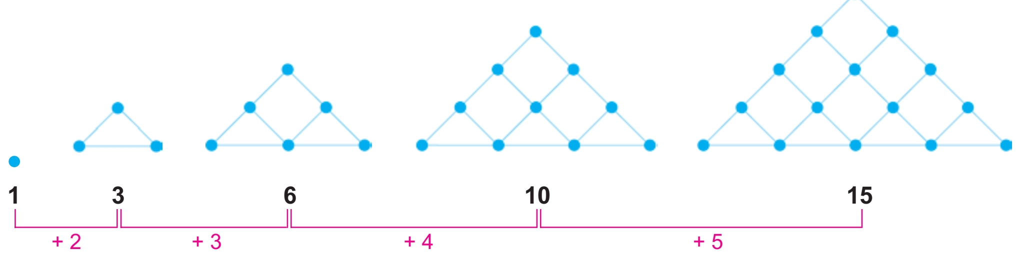
Los chinos escribían la sucesión de números naturales de la siguiente forma:



Los babilonios inventaron la "escritura cuneiforme" que significa en forma de cuña hace cinco mil años.

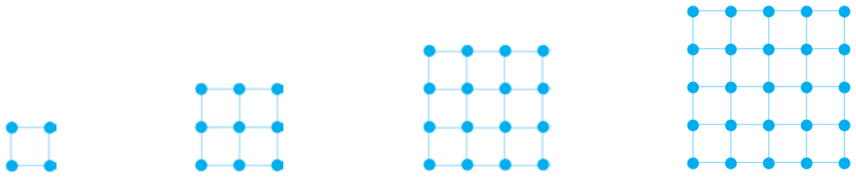


- Las sucesiones numéricas infinitas más conocidas son:
  a. Formamos los números triangulares sumándole al punto 1 el siguiente número natural que es 2 y obtenemos 3; luego le sumamos 3 y obtenemos 6, y así van obteniéndose los términos.
  Los números triangulares podemos encontrar en las potencias $(a + b)^6$; cuyos coeficientes aparecen en el triángulo de Pascal o Tartaglia, que vimos en cursos anteriores.



• La sucesión es: (1, 3, 6, 10, 15, ...)

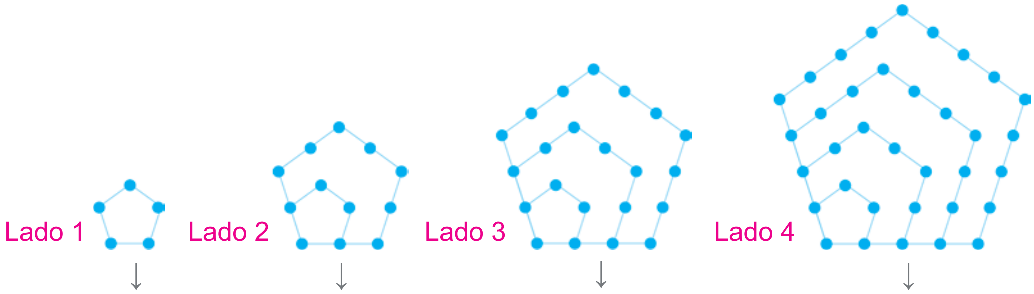
b. Formamos los números cuadrangulares con la sucesión de números impares y así llegamos a los cuadrados perfectos.



4	**9**	**16**	**25**
1 + 3 = 4	**1 + 3 + 5 = 9**	**1 + 3 + 5 + 7 = 16**	**1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25**

- La sucesión es: 4, 9, 16, 25, ...

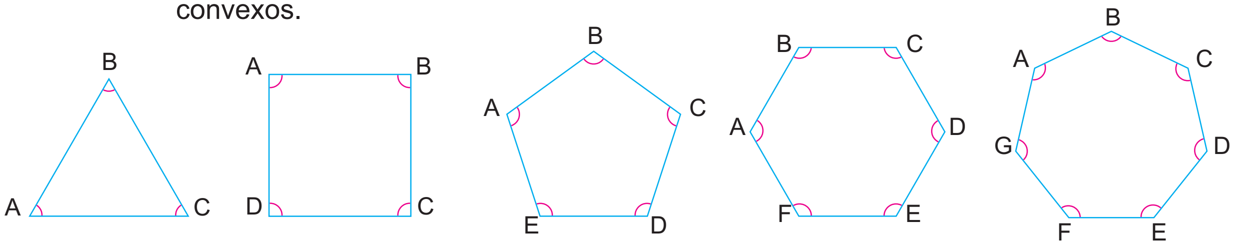
c. El pentágono se forma con 5 puntos si tiene lado 1; si tiene lado 2 se forma con 12 puntos; si tiene lado 3 se forma con 22 puntos, y así sucesivamente.



Nº de puntos	**5**	**12**	**22**	**35**
Nº de orden	**1**	**2**	**3**	**4**

- Colocamos en sucesión: 5, 12, 22, 35, ...

d. Averiguamos la sucesión de la suma de los ángulos interiores de los polígonos convexos.



Nº de orden	**Polígonos Nº. de lados**	**Suma de los ángulos interiores**	
1	3 lados	180º	180º
2	4 lados	360º	180º
3	5 lados	540º	180º
4	6 lados	720º	180º
5	7 lados	900º	
$n-2$	n	S = 180 ($n-2$)	

Convexo: que no tiene entrantes.

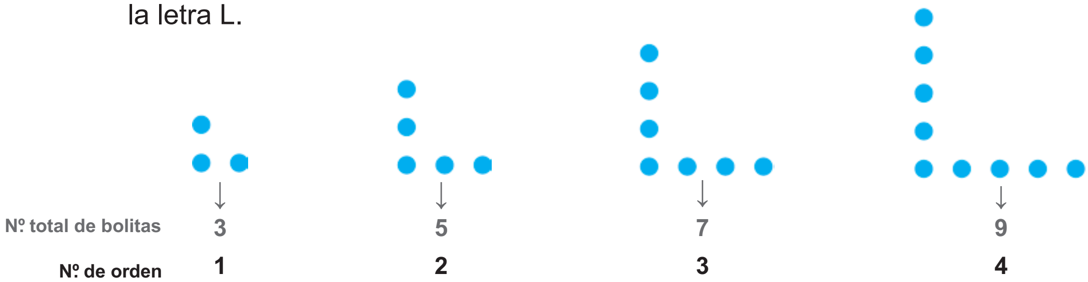
Concluimos diciendo que la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es S = 180 (n – 2).

1.3. Determinación de una sucesión

Las sucesiones se forman utilizando “patrones” que pueden ser numéricos (si se utilizan números) o no numéricos (si se emplean formas, colores, sonidos u otros atributos).

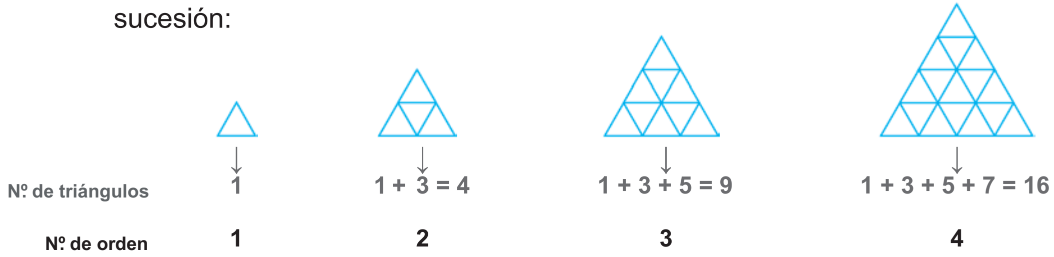
Ejemplos:

a. Observamos y analizamos la siguiente sucesión de bolitas, colocadas en forma de la letra L.



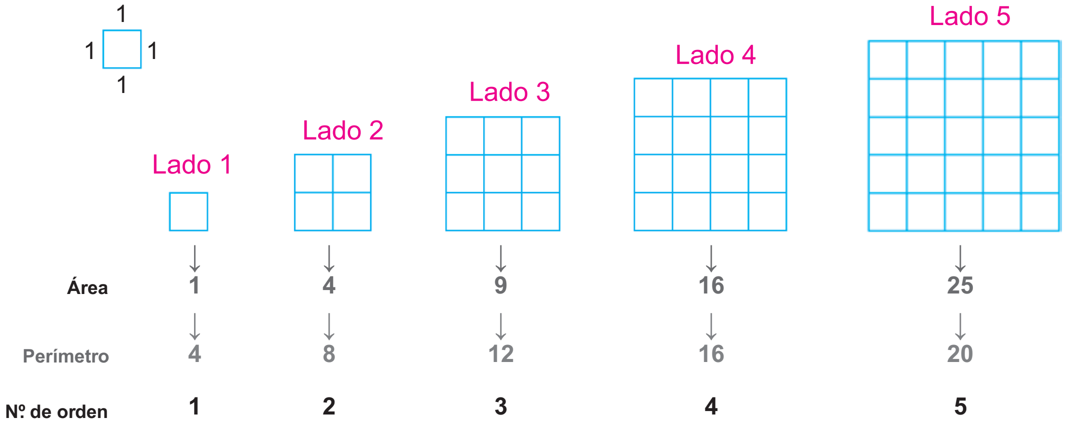
→ Al pasar de un término a otro cambia el número de ● .
→ La forma permanece invariable.
→ Cada término consecutivo obtenemos agregando 2 bolitas; una en forma horizontal y otra vertical.
→ La sucesión es: 3, 5, 7, 9, ... (infinita).

b. Utilizamos patrones formados por triángulos equiláteros y obtenemos la siguiente sucesión:



→ Escribimos así la sucesión: 1, 4, 9, 16,... ; es la sucesión de cuadrados perfectos.

c. Hallamos el perímetro y el área de cada cuadrado y formamos las sucesiones.



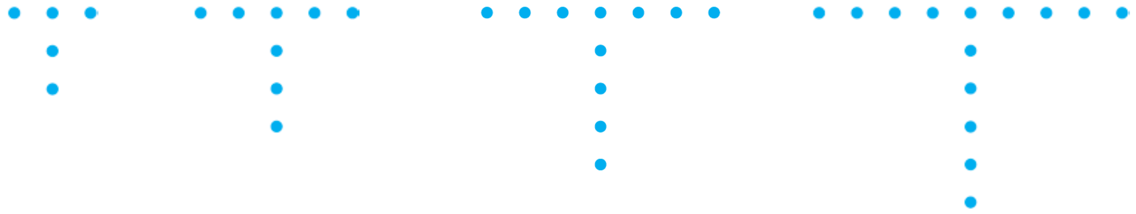
→ Sucesión de perímetros: (4, 8, 12, 16, 20, ...)

→ Sucesión de áreas: (1, 4, 9, 16, 25, ...)

1 Actividades de fijación

a. Escribo las sucesiones numéricas asociadas a los siguientes gráficos y comparto mis resultados.

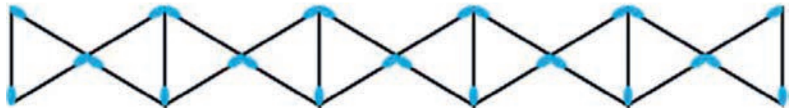
1)



2)

b. Relaciono el número de divisiones de la circunferencia con los números pares y también con los ángulos.

c. Observo la figura formada con palitos de fósforos, completo la tabla con el número de fósforos necesarios para formar lazos  y escribo la sucesión.



Nº DE LAZOS	Nº DE FÓSFOROS
1	6
2	
3	
4	
5	

d. Selecciono una de las propuestas dadas con anterioridad y creo un problema sobre sucesiones. Intercambio este nuevo problema con un compañero o compañera para evaluar su formulación.

1.4. Ley de formación de una sucesión

En el ejercicio anterior formamos la sucesión de número de fósforos a través de los lazos dados.

Así la sucesión de Nº de fósforos es: 6, 11, 16, 21, 26.

$$\begin{array}{ccccccccc} 6 & & 11 & & 16 & & 21 & & 26 \\ & 5 & & 5 & & 5 & & 5 & \end{array}$$

Al primer término a_1 le agregamos 5 y formamos el término a_2; al a_2 le agregamos 5 y formamos el término a_3; esto indica que 5 unidades debemos agregar e ir formando el término general que es $5n + 1$. Con el término general podemos calcular cualquier término de la sucesión de número de fósforos.

Podemos concluir diciendo: La ley de formación de una sucesión es la regla que nos permite calcular un término cualquiera de una sucesión.

Ejemplos:

a. Hallamos los cinco primeros términos de la sucesión.

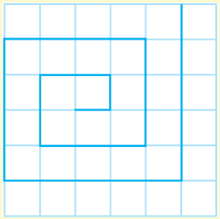
$a_n = 2n$, donde n € N

- Para $n = 1$ → $a_1 = 2.1 = 2$
- Para $n = 2$ → $a_2 = 2.2 = 4$
- Para $n = 3$ → $a_3 = 2.3 = 6$
- Para $n = 4$ → $a_4 = 2.4 = 8$
- Para $n = 5$ → $a_5 = 2.5 = 10$

Los términos se van formando con los múltiplos de 2, o sea, con los números pares.

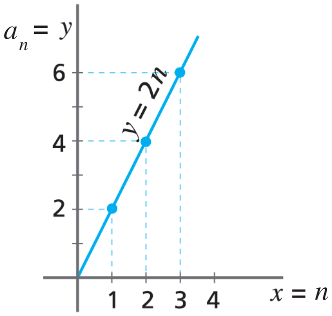
Luego la sucesión es: 2, 4, 6, 8, 10 → sucesión de los cinco primeros números pares.

Espiral trazada en fondo cuadrangular



La sucesión formada es: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4,...

El término general es $2n$; esto lo expresamos como función de la siguiente manera: $y = 2n$ que llevamos al plano cartesiano y graficamos para demostrar el crecimiento de la función.



x	y
1	2
2	4
3	6
4	8

Concluimos que es una **función lineal creciente**.
Es lineal porque se representa por una recta y es creciente porque su pendiente es positiva.

Una **sucesión** es una función que se define entre el conjunto de los números enteros positivos y el conjunto de los números reales.

b. Determinamos el término a_n, llamado término general, en la sucesión de los números impares: (1, 3, 5, 7, ...)

Observamos que: la sucesión (1, 3, 5, 7, 9) se forma sumando 2 a cada término.

2 2 2 2

- Para n = 1 → $a_1 = 1 = 2.1 - 1 = 1$
- Para n = 2 → $a_2 = 3 = 2.2 - 1 = 3$
- Para n = 3 → $a_3 = 5 = 2.3 - 1 = 5$
- Para n = 4 → $a_4 = 7 = 2.4 - 1 = 7$

$$a_n = 2.n - 1$$

Para un n, cualquiera $a_n = 2n - 1$, es el término general donde $n \in$ N.

> Luego, podemos concluir que si el término general se da en función de n, esta fórmula expresa la **ley de formación**.

Si contamos con sala de computación podemos construir gráficos similares utilizando programas informáticos para realizar la gráfica de las funciones y compararlas entre sí.

$y = 2n$ e $y = 3n$

c. Trabajamos con fichas cuadrangulares formando una sucesión, teniendo en cuenta las siguientes condiciones:

- Partimos con dos fichas.
- Agregamos una ficha para cada valor de n, que es el número de orden.

Nº DE ORDEN	Nº DE FICHAS	
1	☐☐	→ $a_1 = 2$ fichas
2	☐☐☐	→ $a_2 = a_1 + 1 = 2 + 1 = 3$ fichas
3	☐☐☐☐	→ $a_3 = a_2 + 1 = 3 + 1 = 4$ fichas
4	☐☐☐☐☐	→ $a_4 = a_3 + 1 = 4 + 1 = 5$ fichas

Como vemos, fuimos agregándole 1 ficha a partir de 2 fichas.
Por tanto, la sucesión es: 2, 3, 4, 5,... $n + 1$.

> Concluimos: $n + 1$, es el término general para $n \in$ N y $n \geq 1$.

1.4.1. Método de las diferencias finitas

En ciertas sucesiones es fácil determinar el término general, por ejemplo:

a. En el conjunto de números naturales: 0, 1, 2, 3, 4, ...n

b. En el conjunto de números pares: 0, 2, 4, 6, 8, ... $2n$

En otras sucesiones el término general no es muy evidente, por esa razón se utiliza el *método de las diferencias finitas*, que consiste en determinar la diferencia entre los términos, hasta llegar a encontrar una diferencia común.

Si al diferenciar una vez los términos ya llegamos a encontrar un número común entonces el término general es de la forma $an + b$; donde a y b los determinamos dándole a n los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... Si el término general es de la forma $an + b$, la sucesión es una función lineal.

Ejemplos

a. En la sucesión: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, ...; hallamos el término general por el método de las diferencias finitas.

1º Colocamos la sucesión en la TABLA 1, y hallamos la diferencia entre los términos.

TABLA 1

Nº DE ORDEN	TÉRMINOS	
1	2	3
2	5	3
3	8	3
4	11	3
5	14	
⋮	⋮	
n	?	

2º Al encontrar la diferencia común 3, construimos la TABLA 2 colocando en ella el número de orden y la forma $an + b$; luego hallamos la diferencia algebraica entre los términos y llegamos a una diferencia común (a); cuyo valor es 3 *(primera diferencia común).*

$$\boxed{a = 3}$$

TABLA 2

Nº DE ORDEN	$an + b$ (TÉRMINO GENERAL)	
1	$a + b$	a
2	$2a + b$	a
3	$3a + b$	a
4	$4a + b$	a
5	$5a + b$	
⋮	⋮	
n	$3n + 1$	

1º término de la sucesión

3º Para hallar el término b, tomamos el primer término de la Tabla 2; $a + b$ e igualamos a 2 *(primer término de la sucesión):*

$$a + b = 2$$
$$\downarrow$$
$$3 + b = 2$$
$$b = 2 - 3$$
$$\boxed{b = -1}$$

4º Reemplazamos en el término general los valores de a y b.

$$an + b = 3.n - 1$$ → término general de la sucesión

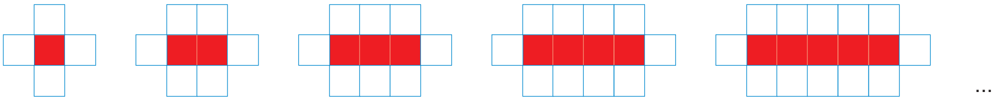
Por tanto, la sucesión queda formada por los múltiplos de 3 menos 1.

5º .Verificamos para los valores de n = 1, 2, 3, 4 y 5.

- $3n - 1 = 3.1 - 1 = 2$
- $3n - 1 = 3.2 - 1 = 5$
- $3n - 1 = 3.3 - 1 = 8$
- $3n - 1 = 3.4 - 1 = 11$
- $3n - 1 = 3.5 - 1 = 14$

* ¿Qué aspecto de este tema no quedó claro? Solicitamos una reexplicación sobre el punto.

b. Determinamos la expresión correspondiente al enésimo término de la sucesión formada por baldosas cuadradas rojas y blancas.



$r \rightarrow$ rojas
$b \rightarrow$ blancas

Nº de orden	1	2	3	4	5	...
	↓	↓	↓	↓	↓	
	$1r + 4b$	$2r + 6b$	$3r + 8b$	$4r + 10b$	$5r + 12b$	

Colocamos en una tabla los datos contando el número de baldosas blancas y rojas; hallamos el termino general de las sucesiones formadas usando el método de las diferencias finitas.

Nº DE ORDEN	BALDOSAS ROJAS (r)	BALDOSAS BLANCAS (b)	SUMA DE LAS $r + b$
1	1	4	5
2	2	6	8
3	3	8	11
4	4	10	14
5	5	12	17
⋮	⋮	⋮	⋮
n	n	?	?

1º Hallamos el término general de la sucesión de baldosas blancas: 4, 6, 8, 10, 12, ... por el método de las diferencias finitas.

Nº DE ORDEN	b	
1	4	
		2
2	6	
		2
3	8	
		2
4	10	
		2
5	12	

$a = 2$

Nº DE ORDEN	$an + b$	
1	$a + b$	
		a
2	$2a + b$	
		a
3	$3a + b$	
		a
4	$4a + b$	
		a
5	$5a + b$	
n	$2n + 2$	

Término general

$\boxed{a = 2}$

$a + b = 4$

$2 + b = 4$

$b = 4 - 2$

$\boxed{b = 2}$

$an + b = \boxed{2n + 2}$

Las baldosas blancas se forman con los múltiplos de 2 más 2 que se escribe: $(2n + 2)$.

Término general: $\boxed{2n + 2}$

2º La sucesión de la suma de baldosas blancas y rojas es: 5, 8, 11, 14, 17, ...

Nº DE ORDEN	$r + b$	
1	5	
		3
2	8	
		3
3	11	
		3
4	14	
		3
5	17	

$a = 3$

Nº DE ORDEN	$an + b$	
1	$a + b$	
		a
2	$2a + b$	
		a
3	$3a + b$	
		a
4	$4a + b$	
		a
5	$5a + b$	
n	$3n + 2$	

Término general

$\boxed{a = 3}$

$a + b = 5$

$3 + b = 5$

$b = 5 - 3$

$\boxed{b = 2}$

$an + b = \boxed{3n + 2}$

La suma de las $(r + b)$ se forma con los múltiplos de 3 más 2 que se escribe: $3n + 2$

Término general: $\boxed{3n + 2}$

3º Contestamos las siguientes preguntas.

- ¿Cuántas baldosas blancas se necesitan para la décima figura?

  Reemplazamos n por su valor 10.
  $2n + 2 = 2 \,.\, 10 + 2 = 20 + 2 = 22$ baldosas blancas

  Se necesitan 22 baldosas blancas.

- ¿Cuántas baldosas rojas y blancas se necesitan para la figura número 65?

  Reemplazamos n por su valor 65 en el término general $3n + 2$.
  $3 \,.\, 65 + 2 = 195 + 2 = 197$ baldosas rojas y blancas

  Se necesitan 197 baldosas rojas y blancas.

- Si tenemos formada una figura con 107 baldosas rojas y blancas, ¿a qué orden corresponde dicha figura?

  Resolvemos la ecuación lineal para hallar el número de orden que corresponde a la figura formada por 107 baldosas rojas y blancas

  $3n + 2 = 107$
  $3n = 107 - 2$
  $3n = 105$
  $n = \frac{105}{3} = 35$ es el 35º orden

  La figura corresponde al 35º orden.

En clase de Arte creamos otros mosaicos parecidos y completamos la sucesión según aprendimos.
Exponemos nuestros trabajos en un tablero.

2 Actividades de fijación

a. Formamos grupos, sorteamos las letras que indican las actividades y asignamos una a cada grupo. Resolvemos y explicamos a los demás el procedimiento seguido.

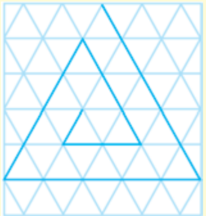
1. $a_n = 3n$; para n $\in$ N

2. $a_n = \frac{1}{2^n}$; para $n \in$ N y $n \geq 2$

3. $a_n = \frac{n}{2n + 1}$; para $n \in$ N y $n \geq 1$

4. $a_n = (-3)^n$; para $n \in$ N y $1 \leq n < 6$

Espiral trazada en fondo triangular.



La sucesión formada es: 1, 2, 3, 4, 5, ...n.

b. Encuentro el término general de las siguientes sucesiones.

1. 0, 5, 10, 15, 20, ...
2. 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, ...
3. 1, 4, 9, 16, ...
4. 1, 3, 5, 7, 9, ...
5. 4, 5, 6, 7, 8, ...
6. 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ...
7. 2, 5, 10, 17, ...
8. 4, 9, 14, 19, ...

c. Interpreto los gráficos, determino y luego comparto con mis pares.

1. La sucesión de números de palitos que se necesitan para construir cuadrados de medidas: 1 x 1, 2 x 2, 3 x 3, ...

Nº de orden	**1**	**2**	**3**	**4**
Nº total de términos				

2. El término general de la sucesión anterior.

3. ¿Cuántos palitos se necesitan para formar un cuadrado de 7 x 7?

1.5. Progresión aritmética Introducción. Concepto

Leemos y analizamos el problema:

La producción de velas navideñas de la empresa familiar “Doña Juana”, desde el año 1998 hasta 2002, sufrió un aumento de 30 000 unidades por año. Sabiendo que su producción fue de 100 000 velas en el año 1998, ¿cuál fue su producción en el año 2002?

Producción de velas.

- Extraemos los datos:
  - Producción inicial: 100 000 velas
  - Aumenta 30 000 unidades por año.
- Con el fin de visualizar mejor los datos, construimos una tabla con la producción anual.

AÑOS	1998	1999	2000	2001	2002
cantidad de velas	100 000	130 000	160 000	190 000	220 000

+ 30 000

En la tabla se nota que la producción fue creciendo en 30 000 unidades cada año.

Por lo tanto, la producción en el 2002 fue de 220 000 velas.

Representamos la producción de los años en forma de sucesión:

100 000, 130 000, 160 000, 190 000, 220 000.

A este tipo de sucesiones se le llama **Progresiones Aritméticas.**

Progresión: cierto tipo de sucesión numérica.

Razón: resultado de la comparación entre dos cantidades.

* Verificamos hallando la razón:
La razón se obtiene restando el término posterior del anterior, en nuestro ejemplo es:

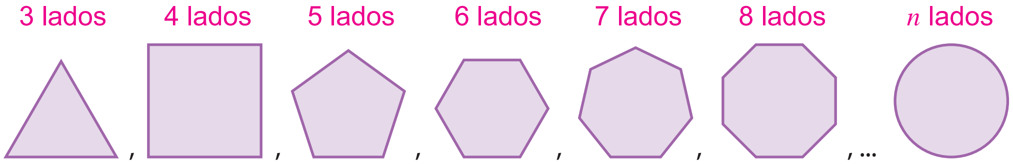
$$\boxed{r = 130\,000 - 100\,000 = 30\,000}$$

La **Progresión Aritmética** (PA) es una sucesión de números en donde la diferencia (común) entre dos cualesquiera de sus términos se llama razón y es además constante.

Opinamos sobre las ventajas y desventajas que acarrea este tipo de empresas familiares y escribimos nuestra conclusión.

EJEMPLOS DE CLASES DE PROGRESIÓN ARITMÉTICA:

- La sucesión: 2, 4, 6, 8, 10, ... es una progresión aritmética de razón $r = 2$ y es creciente porque la razón r > o.
- La sucesión: 15, 10, 5, 0, ... es una progresión aritmética de razón – 5 y es decreciente porque la razón r < o.
- La sucesión: 8, 8, 8 es una progresión aritmética de razón 0 y es constante r = 0.
- La sucesión: 3, 7, 11, 15, 19, 23, ... es una progresión aritmética de razón 4 y es creciente.
- La sucesión: 11, 22, 33, 44, 55, ... es una progresión aritmética de razón 11 y es creciente.
- La sucesión: 50, 40, 30, 20, 10, ... es una progresión aritmética de razón –10 y es decreciente.
- La sucesión formada por el número de lados de los polígonos es una PA creciente de razón 1.



Con el crecimiento de los lados del polígono regular se forma la circunferencia.

1.6. TÉRMINO GENERAL DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA (PA)

Vamos a considerar la progresión aritmética siguiente:
$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ... a_n$

Donde
a_1 = es el primer término,
a_n = es el enésimo término,
r = es la razón o diferencia común entre dos términos consecutivos.

La razón o diferencia común se halla restando el término posterior del anterior $(a_2 - a_1)$ o $(a_4 - a_3)$.

Cada término se obtiene de la suma entre la razón y el término anterior; siempre teniendo el primer término.

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
&a_1\\
&a_2 = a_1 + r\\
&a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r\\
&a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r\\
&a_5 = a_4 + r = a_1 + 3r + r = a_1 + 4r\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
&a_{10} = a_9 + r = a_1 + 8r + r = a_1 + 9r\\
&a_{11} = a_{10} + r = a_1 + 9r + r = a_1 + 10r\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots\\
&a_{n-2} = a_{n-3} + r\\
&a_{n-1} = a_{n-2} + r\\
&a_n = a_{n-1} + r = [a_1 + (n-2)r] + r = a_1 + (n-1)r
\end{aligned}
$$

Luego, el término general o enésimo término de una progresión aritmética es:

$$\underbrace{a_n}_{\text{último término}} = \underbrace{a_1}_{\text{primer término}} + \underbrace{(n-1)}_{\text{número de términos menos uno}} \underbrace{r}_{\text{razón o diferencia común}}$$

EJEMPLOS:

a. José se propone ahorrar U$S 810 para comprar una computadora y compartir con sus hermanos. Si empieza con U$S 200 que ganó en su trabajo y cada mes guarda U$S 61 más que el mes anterior, ¿en cuánto tiempo lo logrará?

- Extraemos los datos y colocamos en una tabla.
- Calculamos el ahorro por mes, sumando U$S 61 al mes anterior:

ENERO	FEBRERO	MARZO	ABRIL	MAYO	JUNIO	JULIO	AGOSTO	SETIEMBRE	OCTUBRE	NOVIEMBRE
200	261	322	383	444	505	566	627	688	749	810

Contamos los meses y conocemos el resultado.

$\boxed{\text{José logrará juntar la suma que se propuso en 11 meses.}}$

- Verificamos nuestro resultado aplicando la fórmula del término general de la progresión aritmética:

$a_n = a_1 + (n-1)\,r$; donde n en este caso indica el tiempo.

Despejamos n siguiendo estos pasos:

$$a_n - a_1 = (n-1)r$$

$$\frac{a_n - a_1}{r} = n - 1$$

$$\frac{a_n - a_1}{r} + 1 = n \rightarrow n = \frac{810 - 200}{600} + 1 = 11$$

Luego llegamos al mismo resultado: 11 meses.

Infiero por qué José invirtió en una computadora. Busco en el CRA cuáles son los recursos que esta ofrece.

- Formulamos otra pregunta a este problema que se pueda resolver con los mismos datos. Resolvemos y verificamos el resultado con la calculadora.

b. Doña Ramona desea invertir la suma de ₲ 25 000 000 en las microempresas de sus 5 hijos. Ella desea distribuir esta suma en forma proporcional, teniendo en cuenta que la diferencia entre lo que recibe uno de los hijos y el anterior es la misma y la diferencia entre lo que recibe el quinto y el tercero debe ser de ₲1 200 000. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

* Relacionamos los datos del problema:

- Si el menor monto es a_1 → el hijo mayor
- $a_5 - a_3 = 1\,200\,000$ → diferencia entre lo que recibió el 5º y el 3º hijo
- $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 25\,000\,000$ → total que repartir entre los cinco hijos

* Interpretemos el problema:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \rightarrow 1^{\circ}\text{ hijo} \\ a_2 - a_1 = r \\ a_3 - a_2 = r \\ a_4 - a_3 = r \\ a_5 - a_4 = r \end{array}\right]$$

La sucesión es una PA de razón r.

Extraemos noticias de diarios y revistas que hablen sobre las microempresas y opinamos sobre lo que expresan las mismas.

Por lo tanto: $a_n = a_1 + (n-1)r \qquad n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

Por ejemplo: $a_5 = a_1 + 4\,.r$

* Calculamos la razón r y a_1

$$a_5 - a_3 = 1\,200\,000$$

$$a_1 + 4r - (a_1 + 2r) = 1\,200\,000$$

$$a_1 + 4r - a_1 - 2r = 1\,200\,000$$

$$2r = 1\,200\,000$$

$$r = \frac{1\,200\,000}{2} = 600\,000$$

→ La razón de la PA es 600 000.

$$a_1 + a_1 + r + a_1 + 2r + a_1 + 3r + a_1 + 4r = 25\,000\,000$$

$$5\,a_1 + 10r = 25\,000\,000$$

$$5\,a_1 + 10\,.\,600\,000 = 25\,000\,000$$

$$5\,a_1 + 6\,000\,000 = 25\,000\,000$$

$$5\,a_1 = 25\,000\,000 - 6\,000\,000 = 19\,000\,000$$

$$a_1 = \frac{19\,000\,000}{5} = 3\,800\,000$$

El primer hijo recibirá ₲ 3 800 000.

* Hallamos cuánto reciben los otros hijos:

$a_1 + r = 3\,800\,000 + 600\,000 =$ ₲ 4 400 000 → 2º hijo
$a_1 + 2r = 3\,800\,000 + 2\;600\,000 =$ ₲ 5 000 000 → 3º hijo
$a_1 + 3r = 3\,800\,000 + 3\;600\,000 =$ ₲ 5 600 000 → 4º hijo
$a_1 + 4r = 3\,800\,000 + 4\;600\,000 =$ ₲ 6 200 000 → 5º hijo

Los hijos reciben, del mayor al menor, guaraníes:
3 800 000 ; 4 400 000 ; 5 000 000 ; 5 600 000 ; 6 200 000.

* Verificamos:

$$\begin{array}{r} 3\,800\,000 \\ 4\,400\,000 \\ +\quad 5\,000\,000 \\ 5\,600\,000 \\ 6\,200\,000 \\ \hline \boxed{25\,000\,000} \end{array}$$

c. Analizamos el enunciado del problema para resolver:

¿Cuántos números pares hay entre 2 y 500?

- * El primer término es $a_1 = 2$, el último término $a_n = 500$ y la razón $r = 2$ porque son números pares.
- * Para calcular la cantidad de números pares nos valemos de la fórmula:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$a_n = a_1 + nr - r$$

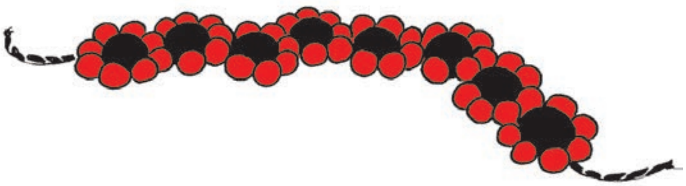
- * Reemplazamos $a_n; a_1$ y r por sus valores

$500 = 2 + 2n - 2$

$500 = 2n \qquad n = \dfrac{500}{2} = 250 \qquad n = 250$ números pares

Por tanto, hay 250 números pares entre 2 y 500.

d. María José diseñó una pulsera con cuentas negras y rojas para regalarle a su hermana. La forma como lo hizo es una cuenta negra en el centro y 8 cuentas rojas alrededor del mismo. El diseño es como sigue:



- ¿Cuál es el término general?
- ¿Cuántas cuentas rojas tendrá que colocar si pone 40 cuentas negras?
- ¿A qué Nº de orden corresponde si tiene 578 cuentas rojas?

* Organizamos los datos en la siguiente tabla:

Nº de orden	Cuentas negras	Cuentas rojas	
1	1	8	6
2	2	14	6
3	3	20	6
4	4	26	6
5	5	32	

→ La razón es 6.

- La sucesión de cuentas negras: 1, 2, 3, 4, 5... 40
- La sucesión de cuentas rojas: 8, 14, 20, 26, 32...
- El término general es: $\boxed{6n + 2}$
- Si tiene 40 cuentas negras, calculamos el número de cuentas rojas.

  $6n + 2 = 6 . 40 + 2 =$ $\boxed{\text{242 cuentas rojas}}$

* Calculamos a qué orden corresponden 578 cuentas rojas.

$578 = 6n + 2$

$578 – 2 = 6n$

$\frac{576}{6} = n$

$n = 96$

$\boxed{\text{El número de orden correspondiente a 578 cuentas rojas es 96.}}$

* Evaluamos utilizando otra estrategia de solución.

Hallamos aplicando la fórmula:

$a_n = a_1 + (n – 1)r$

$a_n = a_1 + nr – r$

$578 = 8 + 6n – 6$

$578 – 8 + 6 = 6n$

$576 = 6n$

$\frac{576}{6} = n$

$\boxed{n = 96}$

* Esta situación problemática nos ayuda a pensar cómo lograr el número de cuentas negras y rojas necesarias para hacer una pulsera.

e. El siguiente problema nos ayudará a ubicar los múltiplos de un número.

- * ¿Cuántos son los múltiplos de 8 comprendidos entre 100 y 1 000, donde el primer término es 104 y el último término es 992?
- * Valiéndonos de la fórmula del término general, despejamos n de la fórmula

$$a_n = a_1 + (n - 1)\ r = a_1 + nr - r$$

$$n = \frac{a_n - a_1 + r}{r}$$

- * Sustituimos en la fórmula despejada y obtenemos el número de términos

$$n = \frac{992 - 104 + 8}{8} = \frac{896}{8} = \boxed{112 \text{ números}}$$

- * $\boxed{\text{Por lo tanto existen 112 múltiplos de 8 comprendidos entre 100 y 1 000.}}$

f. En una PA: $a_{10} = -3$ y el $a_{12} = 11$. Calculamos el primer término y la razón. Luego escribimos la PA.

$$a_{10} = a_1 + 9r \qquad\qquad a_{12} = a_1 + 11r$$

$$① \quad -3 = a_1 + 9r \qquad\qquad ② \quad 11 = a_1 + 11r$$

- Resolvemos el sistema formado y hallamos a_1 y r.

$$\begin{array}{ll} ① & \cancel{a_1} + 9r = -3 \\ ② & \overset{-}{\cancel{a_1}} \overset{-}{+} 11r = -11 \quad \text{(cambiamos el signo del ② y eliminamos } a_1\text{)} \\ \hline & -2r = -14 \quad \dots \times (-1) \end{array}$$

$$2r = 14$$

$$r = \frac{14}{2}$$

$$r = 7 \rightarrow \text{Luego reemplazamos en ①}$$

$$a_1 + 9r = -3$$
$$a_1 + 9.7 = -3$$
$$a_1 + 63 = -3$$
$$a_1 = -3 - 63 = -66$$
$$a_1 = -66$$

- La progresión aritmética es:

$$\underset{\underset{a_1}{\downarrow}}{\underline{-66,}}\ -59,\ -52,\ -45,\ -38,\ -31,\ -24,\ -17,\ -10,\ -3,\ 4,\ \underset{\underset{a_n}{\downarrow}}{\underline{11}}$$

3 Actividades de fijación

a. Resuelvo las siguientes situaciones problemáticas y explico el procedimiento seguido. Verifico mis resultados con la calculadora.

1. Un objeto que cae libremente (no se considera la resistencia del aire), tiene al final del primer segundo una velocidad de 9,8 $\frac{m}{s}$; 29,4 $\frac{m}{s}$ al final del siguiente segundo; 88,2 $\frac{m}{s}$ al final del tercer segundo; y así sucesivamente. ¿Cuál será su velocidad al final del décimo segundo?
2. Las edades de Luisa, Julián, Verónica y Oliver suman 54 años y están en progresión aritmética. Sabiendo que la edad del mayor duplica la del menor, ¿cuáles son sus edades?

b. Uso las fórmulas de progresión aritmética y resuelvo.

1. Determino la razón de una PA, en donde el 20º término es 157 y el 1º. término es 5.

2. ¿Cuántos múltiplos de 11 existen entre 100 y 1 000, donde el primer término de una PA es 121 y el último es 990?

c. Determino:

1. El 11º término de la PA: $1, \frac{4}{3}, \frac{3}{3}, \ldots$
2. El 10º término de la PA: $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots$
3. El 1º término de la siguiente sucesión: $\ldots, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}, \ldots$
4. En una progresión aritmética de 14 términos, el primer término es 2 y el último término es 28. Calculo la razón y formo la progresión.

d. Resuelvo y verifico mis resultados con mis compañeros y compañeras.

1. El séptimo término de una progresión aritmética es 37 y el decimoquinto es 77. Calculo la razón y el primer término.
2. El noveno término de una PA es 25 y el decimotercero es 37. Calculo la razón y el primer término.

1.7. Suma de los términos de una PA finita

Deducimos la fórmula de la suma de una progresión aritmética a partir del siguiente problema:

La zapatería "Las Marías" de las hermanas Martínez produjo mensualmente en el año 2006 las siguientes unidades de calzados de excelente calidad:

En enero → 200 pares de zapatos
En febrero → 500 pares de zapatos
En marzo → 800 pares de zapatos
En abril → 1 100 pares de zapatos
En mayo → 1 400 pares de zapatos
En junio → 1 700... y así en diciembre 3 200 pares de zapatos.

¿Cuál fue la producción semestral de zapatos? ¿Y la anual?

- En la tabla registramos la producción de zapatos en el primer semestre. La misma nos permite ver que se trata de una progresión aritmética creciente.

ENERO	FEBRERO	MARZO	ABRIL	MAYO	JUNIO
200	500	800	1100	1400	1700

300 300 300 300 300

- Como la razón es $r = 300$ podemos calcular la producción de cada mes sumando 300 al mes anterior.

JULIO	AGOSTO	SETIEMBRE	OCTUBRE	NOVIEMBRE	DICIEMBRE
2000	2300	2600	2900	3200	3500

* La cantidad de zapatos producidos por la empresa en 1 año fue la siguiente:

200 + 500 + 800 + 1 100 + 1 400 + 1 700 + 2 000 + 2 300 + 2 600 + 2 900 + 3 200 + 3 500 = 22 200 es la producción de pares de zapatos en el año.

El número 22 200 representa la suma de los términos de la PA formada y de razón 300.

Otra forma de calcular la suma de la producción es ordenando de acuerdo a la deducción propuesta por GAUSS.

Para simplificar la deducción tomaremos 6 meses. Sumando los 6 meses de producción en forma ascendente y descendente y efectuando la suma verticalmente obtenemos el mismo resultado.

$$\begin{array}{rl} & 200 + 500 + 800 + 1\,100 + 1\,400 + 1\,700 \\ + & 1\,700 + 1\,400 + 1\,100 + 800 + 500 + 200 \\ \hline & 1\,900 + 1\,900 + 1\,900 + 1\,900 + 1\,900 + 1\,900 \end{array}$$

→ Forma ascendente

→ Forma descendente

Observamos que hemos utilizado 2 veces los mismos sumandos, luego expresamos la fórmula de Gauss de la siguiente manera:

$$S = \frac{(a_1 + a_n)\,.\,n}{2} = \frac{(200 + 1\,700)\,.\,6}{2} =$$

5 700 pares de calzados en 6 meses

Verificamos: 200 + 500 + 800 + 1 100 + 1 400 + 1 700 = 5 700

Johann Carl Friedrich Gauss, matemático, astrónomo y físico alemán, (1777-1855).
En 1823 publica un trabajo donde da a conocer su famosa “campana de Gauss”, que es la representación gráfica de la ecuación matemática que corresponde a una distribución normal. Realizó varias investigaciones sobre cómo calcular la órbita de un planeta, profundizando sobre las ecuaciones diferenciales y secciones cónicas. Con su teoría de los números proporcionó una estructura sistematizada a esta parte de las matemáticas.

Fuente:<http://es. wikipedia. org/wiki/Carl_ Friedrich_ Gauss>

1.7.1. Deducción de la fórmula de la suma de los términos de una PA finita

Consideremos una PA finita $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_{n-1}, a_n)$ y vamos a indicar por S_n la suma de sus términos, de dos maneras distintas:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ ① creciente

$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1$ ② decreciente

Sumamos miembro a miembro las igualdades ① y ②

$$2\,S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

En una PA finita la suma de dos términos equidistantes con respecto a los extremos es igual a la suma de los extremos.

Entonces tenemos que:

$$2\,S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n)$$

$$2\,S_n = (a_1 + a_n).n$$

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}}$$

→ fórmula que nos permite calcular la suma de los n primeros términos de una PA.

Ejemplos:

a. Leemos y analizamos el problema:

Para el riego de la plaza “Amistad” los vecinos disponen de 12 canillas; la segunda arroja 2 litros más por minuto que la primera, la tercera 2 litros más que la segunda y así sucesivamente, arrojando en total 168 litros por minuto. ¿Cuánta agua echa por minuto cada canilla?, teniendo en cuenta que cada canilla arroja 2 litros más que la anterior.

* Extraemos los datos:
- Se dispone de 12 canillas.
- En total arrojan 168 litros por minuto.
- Cada una arroja 2 litros más que la anterior.

Planteamos las ecuaciones, sumamos e igualamos a 168:

1.ª canilla	x
2.ª canilla	$x + 2$
3.ª canilla	$x + 2 + 2 = x + 4$
4.ª canilla	$x + 6$
$\vdots$	$\vdots \quad \vdots$
12.ª canilla	$x + 22$
	$12x + 132$

* Escribimos la ecuación y resolvemos:

$$12x + 132 = 168$$
$$12x = 168 - 132$$
$$x = \frac{36}{12}$$

$x = 3$ litros por minuto arroja la 1.ª canilla.

Los litros que arroja cada canilla por minuto son:
3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25.

Verificamos aplicando la fórmula de Gauss:

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$168 = \frac{(3 + 25) \,.\, 12}{2} = \boxed{168 \text{ litros por minuto.}}$$

“Si deseamos la continuidad de la vida como la conocemos, es necesaria la creación de una nueva cultura que reconozca y respete el valor del agua. De esta nueva cultura dependerá la supervivencia de las futuras generaciones y especies del planeta”.

Colección National Geographics (en español). Pág. 19. Año 2006.

Investigamos acerca del Acuífero Guaraní

- Recabamos datos en diferentes fuentes sobre el Acuífero Guaraní.
- Analizamos y luego compartimos nuestro trabajo con los demás.

b. La suma de los 20 términos de una PA finita es igual a 710.
Si el primer término es 7, calculamos el 10.º término de esa PA.

Deducimos otra fórmula de suma, determinamos (S_n), reemplazamos a_n por su igual $a_1 + (n - 1)\, r$ y tenemos que:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\, n}{2} = \frac{[a_1 + a_1 + (n-1)\, r]\, n}{2} = \frac{[\, 2a_1 + (n-1)\, r\,]\, n}{2}$$

Reemplazamos los datos → $S_{20} = 710$; $a_1 = 7$; $n = 20$ y hallamos la razón.

$$710 = \frac{[\, 2.7 + (20 - 1)\, r\,] . 20}{2}$$

$$2\,.\,710 = (14 + 19r)\,20$$

$$\frac{1\,420}{20} = 14 + 19r$$

$$71 - 14 = 19r$$

$$57 = 19r \rightarrow r = \frac{57}{19} = 3$$

Luego: $a_{10} = a_1 + 9r = 7 + 9.3 = 7 + 27 = \boxed{34}$

El décimo término es 34.

c. Romina compró una heladera en 11 cuotas mensuales. El primer mes pagó ₲ 220 000 los meses siguientes pagó un 5% más que la primera cuota. ¿Cuál es el incremento de sus cuotas? ¿Cuánto le costó la heladera?

* Cada mes que paga su cuota aumenta el 5% de la 1.ª cuota, es decir:

$$\frac{220\,000\,.\,5}{100} = \boxed{11\,000 \text{ de recargo mensual.}}$$

* Teniendo el recargo mensual, calculamos el monto de cada cuota:

1.ª cuota → 220 000
2.ª cuota → 231 000
3.ª cuota → 242 000
4.ª cuota → 253 000
5.ª cuota → 264 000
6.ª cuota → 275 000

7.ª cuota → 286 000
8.ª cuota → 297 000
9.ª cuota → 308 000
10.ª cuota → 319 000
11.ª cuota → 330 000

La diferencia es constante e igual a 11 000, por lo tanto la razón o incremento es de ₲ 11 000.

El precio de la heladera es la suma total de las cuotas: ₲3 025 000.

- Analizo en grupo sobre las ventajas y desventajas de comprar al contado y a crédito.
- Busco en diarios y revistas artículos que se ofrecen en venta. Calculo la diferencia de precio entre la compra al contado y a crédito.

* Verificamos utilizando la fórmula de suma de una progresión aritmética:

$$S = \frac{(a_1 + a_n)\,.\,n}{2} = \frac{(220\,000 + 330\,000)\,.\,11}{2} = \boxed{3\,025\,000}$$

d. Expresamos en forma de sucesión los ángulos de un triángulo ya estudiados en Geometría. Sabiendo que las medidas de los tres ángulos están en PA y el menor de esos ángulos mide 40º, calculamos las medidas de los otros dos.

$a_1 = 40;\quad a_2 = 40 + r \quad \text{y} \quad a_3 = 40 + 2r$

Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo mide 180º, escribimos:

$$40º + 40º + r + 40º + 2r = 180º$$

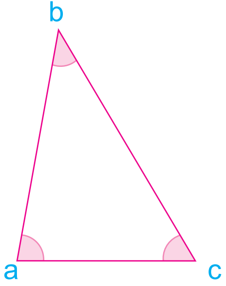
$$120º + 3r = 180º \;:\; 3$$

$$40º + r = 60º$$

$$r = 60º - 40º = 20º$$

$$a_2 = 40º + 20º = 60º$$

$$a_3 = 60º + 20º = 80º$$



Luego, los ángulos miden: 40º; 60º y 80º.

4 Actividades de fijación

a. Aplico la fórmula de Gauss para encontrar la suma de las siguientes progresiones:

1. La suma de los 70 primeros términos de la PA : 4, 8, 12, 16, 20, ...
2. La suma de los 50 primeros términos de la PA : 1, 7, 13, 19, ...
3. La suma de los 30 términos de una PA finita es igual a 1 890. Si el primer término es 5, calculo el 15º término de esa PA

b. Resuelvo y luego explico cómo he hecho para llegar al resultado y qué dificultades encontré.

1. A Mariela le ofrecen un trabajo por 5 años con un salario inicial de 1 200 dólares al año y un aumento de 100 dólares cada año (después del primero) o bien un aumento de 35 dólares cada seis meses (después de los primeros 6 meses). ¿Cuál es la mejor oferta?
2. Matías alquila una casa en las siguientes condiciones: el primer año paga ₲ 300 000 mensuales y cada año aumenta en ₲ 90 000 mensuales. ¿Cuánto pagará mensualmente al cabo de 5 años?
3. Raquel compró 10 libros, por el primero pagó ₲130 000 y por cada uno de los demás, ₲10 000 menos que el anterior. ¿Cuánto suma el gasto de todos los libros?

1.8. Interpolación de medios aritméticos

* Leemos y analizamos la siguiente situación:

La producción semanal de una fábrica de excelente artesanía en madera de la ciudad de Caaguazú está en progresión aritmética. Si en enero produce 800 sillas y en junio 2 800, ¿cuántas sillas fabricaron en febrero, marzo, abril y mayo?

- Opinamos sobre la importancia de la reforestación y la forma de realizarla. ¿Qué se hace al respecto en nuestra comunidad?

* Entresacamos los datos.
La fábrica de sillas produce en 6 días:

enero:	800 sillas
febrero:	?
marzo:	?
abril:	?
mayo:	?
junio:	2 800 sillas

Vamos a formar una progresión aritmética donde
$a_1 = 800, \quad a_n = 2\,800 \quad \text{y} \quad n = 6$

* Resolvemos calculando primero el valor de la razón:

$$r = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{2\,800 - 800}{6 - 1} = \frac{2\,000}{5} = 400$$

$$\boxed{r = 400}$$

Caaguazú (178 km)

Esta ciudad fue fundada en 1592. Lleva el mismo nombre del Departamento en el que está ubicada y cuyo significado es "bosque grande".
En Caaguazú es importante la producción de artesanía en madera y existen también maderas petrificadas.

(Extraído de la Guía Turística "La magia de nuestra tierra"- 2003)

•Indagamos sobre la influencia que tiene en el ecosistema, la tala indiscriminada de árboles.

Los términos son:

$a_2 = 800 + 400 = 1\,200$

$a_3 = 1\,200 + 400 = 1\,600$

$a_4 = 1\,600 + 400 = 2\,000$

$a_5 = 2\,000 + 400 = 2\,400$

- Escribimos la progresión aritmética:
  800, 1 200, 1 600, 2 000, 2 400, 2 800.

En los meses de febrero, marzo, abril y mayo la producción de sillas fue:1200, 1600, 2000 y 2400.

* ¿Qué pasos llevados a cabo durante la explicación de la interpolación aritmética nos facilitaron la comprensión del tema?

Los términos comprendidos entre los extremos se llaman medios aritméticos y la operación de encontrar los términos de una sucesión entre dos de ellos conocidos se denomina interpolación.

Interpolar medios aritméticos entre dos números, consiste en formar una progresión aritmética en la cual los dos números dados son los términos primero y último.

Ejemplo:

a. Interpolamos 5 medios aritméticos entre – 5 y 19, luego escribimos la progresión aritmética.

* Los datos son: $a_1 = -5$; $a_n = 19$; $n = 7$ y deseamos encontrar los términos medios.

* Primero hallamos la razón:

$$r = \frac{a_n - a_1}{n-1} = \frac{19-(-5)}{7-1} = \frac{19+5}{6} = \frac{24}{6} = 4 \quad \rightarrow \quad r = 4$$

* Calculamos cada término así:

$-5 + 4 = -1$

$-1 + 4 = 3$

$3 + 4 = 7$

$7 + 4 = 11$

$11 + 4 = 15$

Ahora podemos escribir los términos entre – 5 y 19:
$-5,\ \underline{-1},\ \underline{3},\ \underline{7},\ \underline{11},\ \underline{15},\ 19$

5 Actividades de fijación

a. Determino la razón y escribo:

1. Seis medios aritméticos entre 3 y 38
2. Diez medios aritméticos entre 127 y 6
3. Siete medios aritméticos entre 20 y 100
4. Cuatro medios aritméticos entre 7 y 32
5. Cuatro medios aritméticos entre $\frac{1}{7}$ y $\frac{6}{7}$

b. Jimena camina diariamente de su casa al colegio empleando 30 minutos. Se propuso disminuir el tiempo que emplea gradualmente en una semana. Sabiendo que el 5º día recorrió en 10 minutos, ¿cuántos minutos empleó en los otros días? ¿Qué beneficios acarrea a la salud la caminata diaria?

c. En una tienda de artesanía la ganancia sobre la venta crece en PA mensualmente. Si en enero tuvo una ganancia de ₲ 10 200 000 y en junio de ₲ 12 200 000, ¿cuánto ganó en los meses de febrero, marzo, abril y mayo?

d. Formulo un problema basado en el anterior suponiendo que la ganancia haya sido el doble y dando otra cifra para la ganancia de junio.

1.9. Progresión geométrica (PG). Concepto

Con esta situación problemática daremos inicio al concepto de progresión geométrica:

La fábrica de bicicletas de la "Cooperativa Unida", produjo 50 000 unidades en el primer trimestre del año 2006. Sabiendo que la producción se ha duplicado cada trimestre, los socios desean saber cuántas bicicletas fueron producidas trimestralmente, para ver si pueden cumplir con los pedidos del año 2007.

Fábrica de bicicletas.

* La producción de bicicletas en el 1º trimestre del año 2006 fue de 50 000 unidades.

El estudio realizamos calculando cuántas bicicletas se produjeron en cada trimestre:

- Primer trimestre: → $a_1 = 50\,000$ bicicletas.
- Segundo trimestre: → $a_2 = 50\,000 \times 2 = 100\,000$ bicicletas.
- Tercer trimestre: → $a_3 = 100\,000 \times 2 = 200\,000$ bicicletas.
- Cuarto trimestre: → $a_4 = 200\,000 \times 2 = 400\,000$ bicicletas.

La producción trimestral de bicicletas en el año representamos por la sucesión:
50 000, 100 000, 200 000, 400 000.

* Explicamos el problema y los pasos seguidos para resolverlo.

A este tipo de sucesiones se las denomina progresiones geométricas. En ellas observamos que cada término a partir del segundo, es igual al anterior multiplicado por 2

* Generalizamos de la siguiente manera, llamando q a la razón geométrica.

Primer trimestre: a_1

Segundo trimestre: $a_2 = a_1 q$

Tercer trimestre: $a_3 = (a_1 q) \,.\, q = a_1\, q^2$

Cuarto trimestre: $a_4 = (a_1 q^2) \,.\, q = a_1 q^3$

Ahora podemos hallar: $\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}$ fórmula que nos permite calcular el término enésimo de una progresión geométrica.

Progresión geométrica (PG) es toda sucesión de números en la cual cada término se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad constante denominada razón de la progresión.

Ejemplos:

a. Interpretamos, definimos el procedimiento que vamos a seguir y resolvemos la siguiente situación problemática:

Don José, propietario de una granja, construyó un pozo para contar con agua potable, pagando por el primer metro ₲ 20 000 y por los metros restantes el triple que el anterior. Sabiendo que por el último metro de excavación se pagaron ₲1 620 000, ¿qué profundidad tiene el pozo? ¿Cuánto se pagó por toda la excavación?

* Los datos relevantes del problema son:
- Se pagaron ₲ 120 000 por el primer metro de excavación.
- Por cada metro que se excavó se pagó el triple que el anterior.
- Por el último metro de excavación se pagaron ₲ 1 620 000.
- Por medio de un pequeño análisis podremos saber los metros que se cavaron, calculando el costo de cada metro.

* Calculamos del costo de la excavación del pozo:

a_1 = 20 000 se pagan por 1 metro
a_2 = 20 000 x 3 = ₲ 60 000 se pagan por 2 metros
a_3 = 60 000 x 3 = ₲ 180 000 se pagan por 3 metros
a_4 = 180 000 x 3 = ₲ 540 000 se pagan por 4 metros
a_5 = 540 000 x 3 = ₲ 1 620 000 se pagan por 5 metros

El pozo tiene 5 metros y sumando todos los gastos por metro tenemos ₲ 2 420 000.

Pozo de agua.

* ¿Qué otro procedimiento podemos utilizar para resolver el problema?

Valiéndonos de la fórmula también podemos saber la profundidad del pozo y el costo total de la excavación.

$$\underbrace{a_n}_{\text{último término}} = \underbrace{a_1}_{\text{primer término}} \underbrace{q}_{\text{razón}}^{\overbrace{n-1}^{\text{número de término menos 1}}}$$

Despejamos n expresando primero en forma de ecuación exponencial.

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{q^n}{q}$$

$$q \cdot \frac{a_n}{a_1} = q^n$$

$$3 \cdot \frac{1\ 620\ 000}{20\ 000} = 3^n$$

$$243 = 3^n$$

$$3^5 = 3^n \quad \rightarrow n = 5 \text{ metros}$$

Establezco las características del agua potable y de la contaminada y su importancia para la vida. Me informo en los materiales que se encuentran en el CRA.

* Para conocer el gasto total aplicaremos la fórmula de suma de una progresión geométrica.

$$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1} =$$

$$S_n = \frac{20\,000 \; (3^5 - 1)}{3 - 1} =$$

$$S_n = \frac{20\,000 \; . \; (243 - 1)}{2} =$$

$$S_n = \frac{20\,000 \; (242)}{2} = 2\,420\,000$$

Por toda la excavación se pagaron ₲ 2 420 000.

Por la propiedad de la potencia:

$$q^{n-1} = q^n \; . \; q^{-1} = \frac{q^n}{q}$$

b. Verificamos si la siguiente sucesión es una progresión geométrica.

La sucesión es: x, xy, xy^2, xy^3 con $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

Para verificar que es una progresión geométrica, hallaremos la razón.

Primer término → $\frac{a^2}{a^1} = \frac{\cancel{x}y}{\cancel{x}} = y$ → es la razón

Segundo término → $\frac{a^3}{a^2} = \frac{\cancel{xy^2}}{\cancel{xy}} = y$ → es la razón

Tercer término → $\frac{a^4}{a^3} = \frac{\cancel{xy^3}}{\cancel{xy^2}} = y$ → es la razón

La razón es constante y se obtiene dividiendo sus términos (el posterior dividido entre el anterior), podemos afirmar que es una progresión geométrica de razón $q = y$.

* Reflexionamos sobre cada una de las situaciones presentadas y compartimos en grupo si las estrategias utilizadas son adecuadas y fáciles.

6 Actividades de fijación

a. Verifico si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas. En caso positivo, hallo la razón.

1. 600, 300, 150, 75
2. $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, ...$
3. 5, – 25, 125, – 625
4. $3, \; 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{9}$
5. n, $2n^2$, $4\mathrm{n}^2$, $8n^2$,... con $n \neq 0$

b. Demuestro que la sucesión: 4, – 8, 16,... es una progresión geométrica infinita en la cual el primer término, $a_1 = 4$ y la razón $q = -2$.

c. Determino y escribo la sucesión.

1. El 4.º término de la PG donde $a_1 = 8$ y $q = -3$
2. El 6.º término de la PG donde $a_3 = 32$ y $q = 4$.

d. Escribo una PG para cada situación:

1. De 4 términos, sabiendo que $a_1 = \frac{5}{6}$ y la razón $q = \frac{3}{5}$.
2. De 5 términos, siendo $a_1 = \frac{1}{2}$ y $q = -\frac{1}{5}$.
3. De 6 términos, siendo $a_1 = 10^{-1}$ y $q = 10^2$.

e. La caja de perfume de Sabrina tiene caras y bases rectangulares (paralelepípedo rectangular). Sus dimensiones están en progresión geométrica. Hallo las longitudes sabiendo que su volumen es 1 728 cm^3 y la suma de sus dimensiones es 63 cm. Determino los valores de sus dimensiones.

1.10. Clasificación de las progresiones geométricas

Las progresiones geométricas pueden ser:

a. Crecientes, cuando la razón $q > 1$ y los términos de la progresión son positivos; o cuando $0 < q < 1$ y los términos de la progresión son negativos.

EJEMPLOS:

- 2, 4, 8, 16, ... → $q = 2$ → $q > 1$
- – 12, – 6, – 3, ... → $q = \frac{1}{2}$ → $q < 1$

b. Decrecientes, cuando $0 < q < 1$ y los términos son positivos o cuando $q > 1$ y los términos son negativos.

EJEMPLOS:

- 128, 64, 32, ... → $q = \frac{1}{2}$ → $q < 1$
- – 3, – 6, – 12, ... → $q = 2$ → $q > 1$

c. Constantes, cuando $q = 1$.

EJEMPLOS:

- 40, 40, 40, ... → $q = 1$
- – 13, – 13, – 13, ... → $q = 1$

d. Alternadas , cuando $q < 0$.

EJEMPLOS:

- 5, – 10, 20, ... → $q = -2$
- – 9, 3, – 1, ... → $q = -\frac{1}{3}$

7 Actividades de fijación

a. Clasifico las siguientes progresiones geométricas y justifico mi opción.

1) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1,$ 2) – 12, – 36, – 108, 3) 15, 15, 15, 4) – 81, – 27, – 9,

b. Escribo dos ejemplos de progresiones geométricas: crecientes, decrecientes y constantes.

1.11. Deducción de la fórmula del término general de una progresión geométrica

Al resolver el problema sobre la producción de bicicletas llegamos a deducir el término general de una progresión geométrica. En este apartado deduciremos la misma analíticamente.

Sea la progresión geométrica: (a_1, a_2, a_3 , ... a_n), donde a_n es el término enésimo y la razón es q.
Como en toda progresión geométrica, cada término es igual al anterior multiplicado por la razón, podemos escribir que:

Primer término → a_1
Segundo término → $a_2 = a_1 . q$
Tercer término → $a_3 = (a_1 . q) . q = a_1 . q^2$
Cuarto término → $a_4 = (a_1 . q^2) . q = a_1 . q^3$ ...

Vemos que un término cualquiera se obtiene multiplicando el primer término (a_1) por la razón (q) elevada a una potencia igual al número de términos que le anteceden. De la misma forma podemos hallar el término de orden n, denominado término general de la PG, que se expresa así:

$$\boxed{a_n = a_1 . q^{n-1}}$$

Donde:

a_1 = primer término
q = razón
a_n = enésimo término
n = número de términos

Equidistantes: que se encuentran a igual distancia de otra determinada o entre si.

OBSERVACIONES

1º En la progresión geométrica finita: (a_1, a_2, a_3, a_4) los términos a_2 y a_3 son equidistantes de los extremos a_1 y a_4. Así vemos que:

$$a_2 . a_3 = \underbrace{a_1 . q}_{a_2} . a_3 = a_1 . \underbrace{a_3 . q}_{a_4} = a_1 . a_4$$

Generalizando podemos afirmar que en toda progresión geométrica finita, el producto entre dos términos equidistantes de los extremos, es igual al producto de los medios.

EJEMPLO:

- Sea la PG: $\overbrace{3,\ \underbrace{6,\ 12}_{\text{medios}},\ 24}^{\text{extremos}}$. Aplicando la regla vemos que: 6 . 12 = 3 . 24
  72 = 72

2º Si una progresión geométrica finita tiene un número impar de términos, de acuerdo con la demostración anterior, el cuadrado del término medio equivale al producto de los extremos.

EJEMPLO:

- Sea la PG: 5, 15, 45, 135, 405 $45^2 = 5 \times 405$
  2 025 = 2 025

EJEMPLOS:

a. Determinamos el término general de la PG: 3, 9, ...

tenemos que: $a_1 = 3$ y $q = \frac{9}{3} = 3$

Como $a_n = a_1 . q^{n-1} \rightarrow a_n = 3 . 3^{n-1} = 3^{1+n-1} \rightarrow \boxed{a_n = 3^n}$

b. Hallamos el primer término de una PG en que $a_3 = -12$ y $q = -2$

Los datos son:
$a_3 = -12$
$q = -2$
$n = 3$

$a_3 = a_1 . q^2 \rightarrow a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{-12}{(-2)^2} = -3$

Luego $\boxed{a_1 = -3}$

c. En una progresión geométrica el primer término $a_1 = 2$ y $a_6 = 64$. Calculamos su razón.

Los datos son:
$a_1 = 2$
$a_6 = 64$
$n = 6$

$a_6 = a_1 . q^5 \rightarrow q^5 = \frac{a_6}{a_1} = \frac{64}{2} = 32$

$\sqrt[\cancel{5}]{q^{\cancel{5}}} = \sqrt[5]{32} \rightarrow q = \sqrt[\cancel{5}]{2^{\cancel{5}}} = 2$

Luego $\boxed{q = 2}$

En estos ejemplos aplicamos conceptos aprendidos en años anteriores como potencias de igual base, ecuaciones exponenciales y logaritmos.

d. Calculamos el número de términos de la PG : 9, 27, ... , 3^{17}

Los datos son:
$a_1 = 9$
$q = 3$
$a_n = 3^{17}$

Como: $a_n = a_1 . q^{n-1}$

$\downarrow$

$3^{17} = 9 . 3^{n-1} = 3^2 . 3^{n-1} = 3^{2+n-1} = 3^{n+1}$

$3^{n+1} = 3^{17}$

Igualamos los exponentes porque las bases son iguales:

$17 = n + 1 \rightarrow n = 17 - 1 = 16$

Luego, el número de términos de la progresión geométrica es $\boxed{16}$.

OBSERVACIÓN: El número de términos de una progresión geométrica también se puede calcular utilizando logaritmo y sus propiedades.

EJEMPLO: Calculamos el número de términos de la progresión geométrica finita: 3, 6, ... , 48

Los datos son:
$a_1 = 3$
$q = \frac{6}{3} = 2$
$a_n = 48$

$a_n = a_1 . q^{n-1}$ → Fórmula del término general.

$\log a_n = \log a_1 + (n-1) . \log q$ → Aplicamos las propiedades de los logaritmos en ambos miembros.

$n = \frac{\log a_n - \log a_1}{\log q} + 1$ → Despejamos n.

Usamos la calculadora científica para hallar los logaritmos.

$n = \frac{\log 48 - \log 3}{\log 2} + 1 = 4 + 1 = 5$

Luego, el número de términos es $n = 5$.

e. En una progresión geométrica creciente, $a_5 = 4$ y $a_7 = 16$. Calculamos a_6 y la razón.

Los datos son:
$a_5 = 4$
$a_7 = 16$

Como a_6 es el término medio de a_5 y a_7, y además la progresión geométrica tiene un número impar de términos, el producto de los extremos es igual al cuadrado del término central, por tanto:

$$(a_6)^2 = a_5 \cdot a_7$$
$$(a_6)^2 = 4 \cdot 16 = 64$$
$$a_6 = \sqrt{64} = \pm 8$$

Como la progresión geométrica es creciente tomamos $a_6 = 8$.

Para calcular la razón, consideramos que:

$$a_6 = a_5 \cdot q \quad \rightarrow \quad q = \frac{a_6}{a_5} = \frac{8}{4} = 2$$

Luego la razón es $\boxed{q = 2}$.

f. La suma del 2.º y el 5.º término de una progresión geométrica creciente es 168 y la suma del 4.º y el 7.º término es 1 512. Calculamos el primer término y la razón.

* Para resolver aplicamos sistema de ecuaciones:

$$a_2 + a_5 = 168 \qquad ; \qquad a_4 + a_7 = 1\,512$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^4 = 168 \qquad\qquad a_1q^3 + a_1q^6 = 1\,512$$
$$a_1q\,(1 + q^3) = 168 \text{ ①} \qquad\qquad a_1q^3\,(1 + q^3) = 1\,512 \text{ ②}$$

Dividiendo la ecuación ② por la ① tenemos:

$$\frac{\cancel{a_1}\overset{2}{\cancel{q^3}}\cancel{(1 + q^3)}}{\cancel{a_1}\cancel{q}\cancel{(1 + q^3)}} = \frac{1\,512}{168} \rightarrow q^2 = 9 \rightarrow q = 3$$

* Calculamos a_1:

$$a_1q\,(1 + q^3) = 168$$
$$a_1 = \frac{168}{q\,(1 + q^3)} = \frac{168}{q + q^4} = \frac{168}{3 + 3^4} = \frac{168}{84} = 2$$

$\boxed{\text{Luego, la razón es 3 y el primer término es 2.}}$

- ¿Comprendí todos los pasos estudiados de progresiones geométricas? En caso contrario pido al profesor o profesora que me explique.
- Elaboro un cuadro resumen de todo lo aprendido.

8 Actividades de fijación

a. Determino el término general de las progresiones geométricas.

1. 2, 16, ... **2.** – 4, – 16, ... **3.** 5, – 25, ... **4.** 2, 1,...

b. Calculo y verifico mis respuestas con la calculadora.

1. El 6.º término de la PG: 5, –15, 45, ...
2. El 8.º término de la PG: 1, 3, 9, ...
3. El 5.º término de la PG, sabiendo que $a_1 = -4$ y la razón $q = -3$
4. El 1.º término de la PG, en que $a_4 = -48$ y la razón $q = -2$
5. La razón de la PG, en que $a_1 = 4$ y $a_5 = 40\,000$

c. Hallo el número de términos de las siguientes PG:

1) 5, 25, ..., 625 **2)** 4, 16, ..., 1 024

d. Determino el 4º término de una PG creciente, sabiendo que $a_3 = 28$ y $a_5 = 112$.

e. La suma de los dos primeros términos de una PG creciente de cuatro términos es 24 y la suma de los dos últimos es 216. Hallo los términos de la progresión.

f. Resuelvo aplicando diferentes estrategias y justifico mi elección.

1. En una PG creciente la diferencia entre el cuarto y el segundo término es 102 y el tercero es 68. Hallo la razón.
2. Don Andrés compra una propiedad a crédito, debiendo pagarla en 4 años. En el primer año las cuotas mensuales son de U$S 660. En los años sucesivos las cuotas mensuales sufren un incremento del 3% en relación con las del año anterior. ¿Cuál es el monto de cada cuota mensual en el último año de pago?
3. Compré un automóvil por valor de U$S 15 000. Sabiendo que el valor del mismo disminuye en 30% cada año, con relación al valor del año anterior, ¿en cuánto podré venderlo al cabo de 7 años?

- ¿Encontré algunas dificultades en la resolución?
- Conversamos en grupo sobre los aciertos y errores.

1.12. Suma de los términos de una progresión geométrica finita

La suma de los términos consecutivos de una progresión geométrica finita veremos en la siguiente situación que vamos a analizar.

Mariana y su hermano Ernesto se proponen ahorrar cada mes el doble del monto del mes anterior para estudiar guitarra. Si el primer mes ahorraron ₲50 000, ¿cuántos guaraníes ahorrarán en 5 meses?

* Colocamos los datos en forma de matrices, como estudiamos en el 2º. curso. En la primera columna colocamos el Nº. de meses y en la segunda, los ahorros mensuales.

$$\begin{array}{cc} \text{Meses} & \text{Ahorros} \\ \left|\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{r} 50\ 000 \\ 100\ 000 \\ 200\ 000 \\ 400\ 000 \\ 800\ 000 \end{array}\right| \end{array} \rightarrow \text{Es una matriz de orden } \underset{\substack{\downarrow \\ \text{filas}}}{5} \times \underset{\substack{\downarrow \\ \text{columnas}}}{2}.$$

* La deducción haremos según los datos del problema.

Primer término → $a_1 = 50\ 000 = 50\ 000$
Segundo término → $a_2 = 50\ 000 \cdot 2 = 100\ 000$
Tercer término → $a_3 = 50\ 000 \cdot 2^2 = 200\ 000$
Cuarto término → $a_4 = 50\ 000 \cdot 2^3 = 400\ 000$
Quinto término → $a_5 = 50\ 000 \cdot 2^4 = 800\ 000$

* Luego sumamos $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1\ 550\ 000$

* Generalizamos la sucesión expresando cada término de la siguiente manera:

$$\boxed{a_1, a_1 q, a_1 q^2; \ldots, a_1 q^{n-2}, a_1 q^{n-1}}$$

- Observamos que los ahorros mensuales forman una progresión geométrica finita de razón $q = 2$.

  Progresión geométrica (50 000, 100 000, 200 000, 400 000, 800 000)

La suma de los términos de la progresión geométrica nos da el ahorro de 5 meses que es de ₲1 550 000.

- Hallamos la suma (S_n) de los términos de la progresión geométrica:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \quad ①$$

- Multiplicamos esta expresión por q:

$$q.S_n = a_1 q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \quad ②$$

- Restamos ① de ② .

$$\begin{array}{rcl} qS_n & = & \cancel{a_1q} + \cancel{a_1q^2} + \cancel{a_1q^3} + \dots + \cancel{a_1q^{n-1}} + a_1q^n \\ S_n & = & {}^{-}a_1 \overset{-}{+} \cancel{a_1q} + \cancel{a_1q^2} \overset{-}{+} \cancel{a_1q^3} \overset{-}{+} \dots \overset{-}{+} \cancel{a_1q^{n-1}} \\ \hline qS_n - S_n & = & a_1q^n - a_1 \\ S_n (q-1) & = & a_1 (q^n - 1) \end{array} \quad \rightarrow \quad \boxed{S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q-1}}$$

Esta fórmula también podemos expresarla de modo diferente reemplazando en ella a_1 por su igual: $a_1 = \frac{a_n}{q^{n-1}}$

$$S_n = \frac{\frac{a_n}{q^{n-1}}(q^n - 1)}{q-1} = \frac{\frac{a_n}{q^{n-1}} .q^n - \frac{a_n}{q^{n-1}}}{q-1} = \frac{a_nq^{\cancel{n}-\cancel{n}+1} - a_1}{q-1} = \boxed{\frac{a_nq - a_1}{q-1}}$$

Esta fórmula nos permite calcular la suma de los términos de una progresión geométrica finita.

EJEMPLOS:

a. El primer término de una progresión geométrica creciente es 3 y el octavo 384. ¿Cuál es la suma de los ocho primeros términos?

Los datos son:
$a_1 = 3$
$a_8 = 384$
$n = 8$

- Calculamos q:

$$a_8 = a_1.q^{8-1} \rightarrow 384 = 3.q^7 \rightarrow q^7 = \frac{384}{3} \rightarrow q = \sqrt[7]{\frac{384}{3}} = \sqrt[7]{128} = 2$$

$$S_n = \frac{a_n.q - a_1}{q-1} = \frac{384 . 2 - 3}{2-1} = 765$$

La suma es 765.

b. Calculamos la suma de los diez primeros términos de la progresión geométrica: 7, 28, ...

Los datos son:
$a_1 = 7$
$n = 10$
$q = \frac{28}{7} = 4$

- Calculamos con la fórmula:

$$S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q-1} = \frac{7.(4^{10} - 1)}{4-1} = \frac{7.(1\,048\,576 - 1)}{3} = 2\,446\,675$$

La suma es 2 446 675.

c. La suma de los términos de una PG finita es 242. Sabiendo que $a_n = 162$ y $q = 3$, calculamos el primer término de la progresión.

- Como $S_n = \dfrac{a_n.q - a_1}{q - 1}$

$$242 = \frac{162.3 - a_1}{3 - 1} \rightarrow 242 = \frac{486 - a_1}{2}$$

$$484 = 486 - a_1 \rightarrow a_1 = 486 - 484 = 2$$

$\boxed{\text{Luego, el primer término es } a_1 = 2.}$

d. Las figuras sucesivas generadas por iteraciones de cuadrados en los cuatro vértices forman una PG de razón 4.

Iteraciones: repeticiones como en la variación de los días, las estaciones, los años, etc.

Nivel	**0**	**1**	**2**	. . .
Número	1	4	16	. . . $4^n = \boxed{2^{2n}}$

→que es el término general de la sucesión.

- Calculamos el quinto término: $a_n = a_1.q^{n-1} \rightarrow = 1.4^4 = 256.$
- Calculamos la suma de los 5 primeros términos: $S = \dfrac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1} = \dfrac{256.4 - 1}{3} = 341$

$\boxed{\text{La suma es 341.}}$

9 Ñaikũmby porãve hagua

ÑAMO FĨCHARE KO'ÃPROBLEMA, ÑAME'ẼATY PETEĨTEĨME, JARRESOLVE HA UPÉI JAHECHAUKA OJUPE MBA' ÉICHAPA OSẼ.

a. Karai Alberto niko omba'apo Lambarépe, ojapo cinto vakapigui iporãitereíva. Peteĩ semana-pe ojapo 10, ambueve semana-pe katu oduplika ohóvo hembiapo. Mboy cintopiko upeicharõ ojapóne poapyha semana-pe.

b. Peteĩ bombon ryru mbohapyvéva idimension niko oĩ progresión geométrica-pe. Pe mba'yru apekueniko 112 cm^2 ha tuichakue katu 64 cm^3. Ahecha mboýpa idimensionkuéra.

c. Asuma ko'ã término progresión geométrica-pegua oñeme'ẽva.

1. 8, 24, ..., 648
2. 1, 22, ..., 210
3. 7, 49, ..., 2 401
4. 20, 100, ..., 12 500

d. Aheka ha ajuhu

1. Razón ha suma ome'ẽva umi 4 primeros términos oĩva progresión geométrica-pe, jaikuaahína pe término peteĩ oguerekoha 2 ha pe irundyha katu 54.
2. Ahecha mboypahína x ecuación-pe, jaikuaaniko pe miembro peteĩha progresión geométrica finitaha.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{x}{16} = 120$$

- ¿Me ayudaron las fórmulas estudiadas?
- Realizo un resumen de todo lo desarrollado en progresiones geométricas.

1.13. Interpolación de medios geométricos

Consideremos la siguiente situación problemática:

En un cultivo de cierto tipo de bacterias, bajo determinadas condiciones, las mismas triplican su volumen cada día. Si el volumen inicial fue de 5 cm^3 y el 5º día fue de 405 cm ^{3}, ¿qué volumen tenían en el 2º, 3º y 4º día? ¿Qué nos dice el término central?

Buscamos en los materiales del CRA informaciones sobre las bacterias y las condiciones en las que se multiplican. Elaboramos un informe y presentamos en Ciencias Básicas y sus Tecnologías.

* Los datos relevantes del problema son:

- Volumen inicial: 5 cm^3
- Volumen al 5º día: 405 cm^3

Queremos calcular los volúmenes que tenían el 2º, 3º y 4º día.

* Vamos a formar una progresión geométrica, en que $a_1 = 5$ y $a_5 = 405$.

* Calculamos la razón:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow 405 = 5.q^4 \rightarrow q^4 = \frac{405}{5} = 81 \rightarrow q = 3$$

Tomamos el valor $q = 3$ (positivo) porque las bacterias se triplican cada día.

Hallamos los términos:

$a_2 = 5.3 = 15$; $a_3 = 15.3 = 45$; $a_4 = 45.3 = 135$

Luego la progresión geométrica es: 5, 15, 45, 135, 405.

Los volúmenes de las bacterias al 2º., 3º. y 4º. día, fueron sucesivamente: 15 cm^3, 45 cm^3 y 135 cm^3.

* Aplicamos la propiedad: el cuadrado del término medio equivale al producto de los extremos.

$$a_3^2 = 405.5$$

$a_3 = \sqrt{405 . 5} = \sqrt{2025} = 45$ → término central de la sucesión.

El término central nos dice que el volumen de las bacterias el tercer día fue de 45 cm^3.

Los términos a_2, a_3 y a_4 comprendidos entre los extremos conocidos se llaman medios geométricos , que en nuestro ejemplo corresponden al volumen del cultivo de bacterias en el 2º, 3º y 4º día. La operación de calcular dichos valores se denomina interpolación .

* ¿Qué pasos llevados a cabo durante la explicación de interpolación de medios geométricos me facilitaron la comprensión del tema?

Interpolar medios geométricos entre dos números, consiste en formar una progresión geométrica en la cual los dos números dados son los términos primero y último, respectivamente.

EJEMPLOS:

a. Interpolamos tres medios geométricos entre 2 y 162.

- Calculamos la razón:

Los datos son:
$a_1 = 2$
$n = 2 + 3 = 5$
(2 conocidos + 3 para interpolar)
$a_5 = 162$

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 \rightarrow q^4 = \frac{a_5}{a_1} = \frac{162}{2} = 81 \rightarrow q = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{9^2} = \sqrt{9} = \pm 3$$

Para $q = 3$, la progresión geométrica es: 2, 6, 18, 54, 162

Para $q = -3$, la progresión geométrica es: 2, – 6,18, – 54, 162

b. Determinamos cuántos medios geométricos debemos interpolar entre $\frac{1}{4}$ y 256 de modo que la razón sea $q = 4$.

Los datos son:
$a_1 = \frac{1}{4}$
$a_n = 256$
$q = 4$

- Calculamos n.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow 256 = \frac{1}{4} \cdot 4^{n-1} \rightarrow 4^4 = 4^{-1} \cdot 4^{n-1}$$

$$4^4 = 4^{n-2} \rightarrow 4 = n - 2 \rightarrow n = 6$$

Luego, debemos interpolar 4 medios geométricos.

10 Actividades de fijación

a. Determino los medios geométricos y describo cómo los resolví.

1. ¿Cuántos medios geométricos debo interpolar entre 8 y $\frac{1}{32}$ de modo que la razón sea $\frac{1}{2}$?
2. Tres medios geométricos entre 48 y 3.
3. Cuatro medios geométricos entre 7 y 21 875.
4. ¿Cuántos medios geométricos debo interpolar entre 96 y 3 de modo que la razón sea $\frac{1}{2}$?

1.14. Aplicaciones de la PG en la Matemática Financiera

1.14.1. Interés compuesto

Todo capital depositado en un banco u otra entidad financiera produce un interés compuesto.

Matemática financiera: Matemática aplicada a las actividades económicas.

Interés compuesto es una ley de capitalización donde los intereses obtenidos al final de cada período se suman al capital para producir intereses en el siguiente período.

La fórmula para hallar el interés compuesto es una ecuación exponencial:

$$\boxed{M = C(1 + i)^t}$$

Donde
M = monto total
C = capital inicial
i = tasa de interés o tanto por uno
t = número de períodos de tiempo

Ejemplos:

a. El curso posee un capital de ₡1 000 000 que coloca en una Cooperativa al 18% anual. ¿Cuál es el monto que obtendrá al cabo de un año, dos años y tres años?

* Los datos son: C = ₡ 1 000 000 ; $i = 18\% \rightarrow i = \frac{18}{100} = 0{,}18$

Aplicamos la fórmula: $M = C\,(1 + i)^t$ para cada período:

t años	$M = C\,(1 + i)^t$	
0	$M = 1\,000\,000\,(1 + 0{,}18)^0 = 1\,000\,000$	→ Capital inicial
1	$M = 1\,000\,000\,(1 + 0{,}18)^1 = 1\,180\,000$	→ Monto al final del primer año
2	$M = 1\,000\,000\,(1 + 0{,}18)^2 = 1\,392\,400$	→ Monto al final del segundo año
3	$M = 1\,000\,000\,(1 + 0{,}18)^3 = 1\,643\,032$	→ Monto al final del tercer año

* Observamos que las cantidades al final de cada año forman una progresión geométrica de razón: (1 + 0,18), o sea 1,18.

Expresamos los montos formando la siguiente progresión:
1 000 000, 1 180 000, 1 392 400, 1 643 032 .

* Verificamos usando la calculadora.

¿Cómo es mi calculadora?

Existen diversos tipos de calculadoras científicas. Cada una de ellas tiene sus particularidades, por eso traen sus manuales.
Aquí describimos el proceso de cada uno de ellos:

$M = C\,(1 + i)^t$

$M = 1\,000\,000\,(1 + 0{,}18)^3$

Digitamos así: $\boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{x^y}\ \boxed{6}\ \boxed{(}\ \boxed{1}\ \boxed{+}\ \boxed{0}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{1}\ \boxed{8}\ \boxed{)}\ \boxed{x^y}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$

En el visor aparece $\boxed{1\,6\,4\,3\,0\,3\,2}$

b. Leemos y explicamos en clase el siguiente problema:

¿En cuántos años un capital de R$ 6 000 al 10% de interés anual compuesto se convertirá en R$ 7 986?

* Expresamos la fórmula:

$$M = C\,(1 + i)^t$$

$$7\,986 = 6\,000\,(1 + 0{,}1)^t$$

$$\frac{7\,986}{6\,000} = 1{,}1^t$$

* Hacemos la solución utilizando logaritmo.

$1{,}331 = 1{,}1^t$ aplicamos $\log$ a ambos miembros

$$\log 1{,}331 = t \log 1{,}1$$

$$t = \frac{\log 1{,}331}{\log 1{,}1} = \frac{0{,}12417}{0{,}04139} = 3 \text{ años}$$

Preguntamos en entidades bancarias y cooperativas cuáles son las tasas de interés compuesto a 5 años de plazo y sobre una cantidad propuesta por nosotros.

Organizamos los datos en un cuadro y quitamos conclusiones.

En 3 años el capital depositado producirá R$ 7 986.

- Ahora hallamos la misma solución aplicando ecuaciones exponenciales.

Otra forma de resolver sería: $1{,}331 = 1{,}1^t$.

$$(1{,}1)^3 = 1{,}1^t \rightarrow \boxed{t = 3 \text{ años}}$$

Comparando ambos procedimientos vemos que obtenemos el mismo resultado.

- Recordamos lo que aprendimos sobre logaritmo y ecuaciones exponenciales.

1.14.2. Anualidades de capitalización

Estudiaremos otro tipo de capitalización denominada anualidades de capitalización.

Anualidades de capitalización son cantidades iguales que se abonan al inicio de cada año a una entidad financiera para formar, junto con sus intereses compuestos, un determinado capital al cabo de un cierto número de años.

EJEMPLOS:

a. Andrea abre una caja de ahorros donde deposita ₡3 000 000 al inicio de cada año. ¿Qué capital tendrá al cabo de 3 años si está impuesto al 16% anual de interés compuesto?

Los datos son: C = ₡3 000 000; $i = \frac{16}{100} = 0{,}16$; $t = 3$ años

- Cada aporte anual produce intereses solamente en el período que está impuesto, del siguiente modo:

Notamos que el tiempo va decreciendo:

1º Anualidad: $3\,000\,000\,(1 + 0{,}16)^3$ = ₡4 682 688

2º Anualidad: $3\,000\,000\,(1 + 0{,}16)^2$ = ₡4 036 800

3º Anualidad: $3\,000\,000\,(1 + 0{,}16)^1$ = ₡3 480 000

capital final acumulado → ₡12 199 488

El capital final acumulado es ₡12 199 488.

Observamos que las cantidades al final de cada año forman una progresión geométrica de razón (1 + 0,16). Además, el capital final acumulado obtenemos sumando los términos de esa progresión geométrica.

Cuando el período de tiempo es grande para calcular las anualidades de capitalización se utiliza la siguiente fórmula que se obtiene de la suma de términos de la progresión geométrica.

"UNIDOS PARA COOPERAR, COOPERAR PARA PROGRESAR"

Esta es la frase en la que se puede resumir la doctrina de la cooperativa.
Una cooperativa es la asociación voluntaria de personas que mediante el esfuerzo propio y la ayuda mutua, y sin fines de lucro, propenden al mejoramiento de las condiciones de vida, organizándose conforme a la ley.

Las cooperativas pueden ser: de producción de bienes (ej.: agrícolas), de prestación de servicios (ej.: médicas) o de ahorro y préstamo y de consumo; y tienen por fin promover el apoyo mutuo.

Deduciremos la fórmula de anualidades de la capitalización de la siguiente forma:

1º anualidad $\rightarrow C\,(1+i)^{t}$
2º anualidad: $\rightarrow C\,(1+i)^{t-1}$
$\vdots$ $\vdots$
Penúltima anualidad: $\rightarrow (1+i)^{2}$
Última anualidad: $\rightarrow (1+i)$

El capital final acumulado obtenemos de la suma de los t términos de la progresión geométrica:

$C_f = C\,(1+i)^{t} + C\,(1+i)^{t-1} ... + C\,(1+i)^{2} + C\,(1+\mathrm{i})$

El primer término $a_1 = C\,(1+\mathrm{i})^{t}$

Razón: $q = (1+i)$

Cantidad de términos: t

Aplicamos la fórmula de la suma de una progresión geométrica

$$S = \frac{a_1\,(q_n - 1)}{q-1} = \frac{C\,(1+i)\,[(1+i)^{t} - 1]}{\cancel{1} + i - \cancel{1}} = \boxed{\frac{C\,[(1+i)^{t+1} - (1+i)]}{\mathrm{i}}}$$

→ Fórmula que nos permite calcular el capital acumulado.

b. La Sra. Micaela decide ahorrar ₲5 000 000 anuales que ingresa en un banco al principio de cada año para el estudio universitario de su hija. ¿Qué capital tendrá al cabo de 6 años si está impuesto al 12% de interés compuesto?

Los datos son: C = ₲ 5 000 000 ; t = 6 años; $i = \frac{12}{100} = 0{,}12$

1º período de capitalización: $5\,000\,000\,(1+0{,}12)^{6} = 5\,000\,000\ .\ 1{,}12\ 6 =$ 9 869 113,43

2º período de capitalización: $5\,000\,000\,(1{,}12)^{5} =$ 8 811 708,42

3º período de capitalización: $5\,000\,000\,(1{,}12)^{4} =$ 7 867 596,80

4º. período de capitalización: $5\,000\,000\,(1{,}12)^{3} =$ 7 024 640

5º. período de capitalización: $5\,000\,000\,(1{,}12)^{2} =$ 6 272 000

6º. período de capitalización: $5\,000\,000\,(1{,}12) =$ 5 600 000

Capitalización final acumulada ₲ 45 445 058,65

Verificamos usando la fórmula:

$$C_f = \frac{C\,[(1+\mathrm{i})^{t+1} - (1+\mathrm{i})]}{\mathrm{i}} = \frac{5\,000\,000\,[(1+0{,}12)^{7} - (1+0{,}12)]}{0{,}12} = 45\,445\,058{,}64$$

El capital final acumulado es de ₲ 45 445 058,64.

En los seis años, ¿qué porcentaje de aumento obtuvo la Sra. Micaela con este sistema de capitalización?

Durante seis años aportó al inicio de cada año ₲ 5 000 000.

La cantidad aportada fue ₲ 30 000 000.

Utilizando la regla de tres calculamos el porcentaje.

45 445 058,65 —— 100%
30 000 000 —— x

x = 66% → porcentaje de aporte.

100 – 66 = 34% → porcentaje de aumento del capital.

El porcentaje de aumento que obtuvo la Sra. Micaela es de 34%.

"El Banco Central del Paraguay es una persona jurídica de derecho público, con carácter de organismo técnico con autarquía administrativa y patrimonial y autonomía normativa en los límites de la Constitución Nacional y las leyes".

"El Banco Central del Paraguay ejercerá las funciones de Banca Central del Estado".
"Son objetivos fundamentales del Banco Central del Paraguay preservar y velar por la estabilidad del valor de la moneda y promover la eficacia y estabilidad del sistema financiero".

Ley Nº. 489 "Orgánica del Banco
Central del Paraguay"

11 Actividades de fijación

a. Resuelvo los siguientes problemas y verifico con la calculadora.

1. ¿En qué monto se convertirán ₲ 2 000 000 que tengo ahorrados para comprar un terreno colocados al 16% de interés compuesto anual en 5 años?
2. ¿A qué tanto por ciento anual se han colocado ₲6 000 000 para que al cabo de 3 años se hayan convertido en ₲9 858 192?
3. Al nacer María, su madre depositó ₲3 000 000 al 13% de interés compuesto para gastos de salud. ¿Qué capital tendrá cuando cumpla 15 años?
4. Jorge decide ahorrar para un viaje de estudio ₲5 000 000 anuales que deposita en un banco al inicio de cada año. ¿Qué capital tendrá al cabo de 6 años si está impuesto al 13% anual de interés compuesto?
5. La familia Vargas deposita en una Cooperativa ₲5 500 000 al principio de cada año. Si la caja le paga 12% anual de interés compuesto, ¿qué capital tendrá al cabo de 20 años?
6. Andrés depositó ₲ 3 000 000 al 9% de interés anual compuesto. ¿En cuántos años retiró la suma de ₲4 615 872? ¿Por qué es importante el ahorro?

b. Averiguamos en bancos, cooperativas y financieras el porcentaje que pagan sobre el capital representado en los dos problemas.

- Sobre un capital de ₲5 000 000 calculamos el monto del mismo en 3 meses, 6 meses y 1 año, según los intereses que ofrecen: los Bancos o Financieras y las Cooperativas.
- Elegimos un Banco, Cooperativa o Financiera. Calculamos el capital que tendremos al cabo de tres años si al inicio de cada año depositamos ₲200 000 a un interés compuesto y a una tasa anual ofertada por la institución.

Fundamentamos sobre la importancia de ahorrar trabajando en grupo y escribimos nuestras conclusiones.

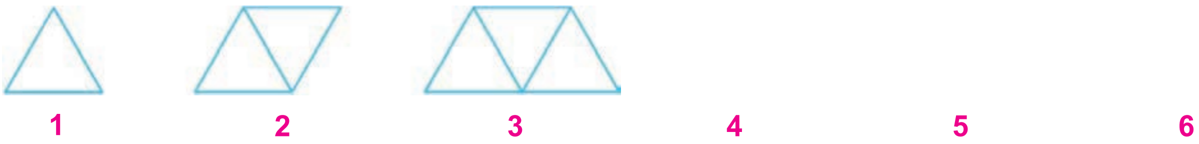
Investigamos en los Bancos, Cooperativas y Financieras de nuestra comunidad sobre:

- ¿Qué sistemas de ahorro ofrecen?
- ¿Cuál es el interés que se paga en cada sistema? ¿De qué depende?
- ¿Cómo se calculan los intereses en cada sistema de ahorro?
- ¿Qué ventajas nos ofrecen los Bancos, Cooperativas y Financieras?
- ¿Ahorraríamos en guaraníes o en moneda extranjera? Justificamos nuestra respuesta.

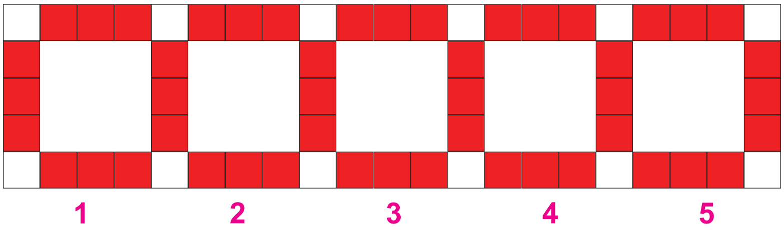
12 Actividades de retroalimentación

ELEGIMOS UNA DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS Y EXPLICAMOS A LOS DEMÁS COMPAÑEROS Y COMPAÑERAS EN QUÉ CONSISTE, ASÍ COMO LA ESTRATEGIA QUE CONSIDERAMOS OPORTUNA PARA RESOLVERLA

a. Observo la cadena de triángulos equiláteros; formo la sucesión de sus perímetros y luego hallo el enésimo término.



b. Observo la figura formada por baldosas rojas y blancas y construyo una tabla.



c. Teniendo en cuenta la tabla del ejercicio anterior, contesto:

1. ¿Cuántas baldosas rojas se necesitan para el 12º orden?
2. ¿Teniendo 665 baldosas entre rojas y blancas, a qué número de orden corresponde?

d. Dadas las siguientes sucesiones encuentro en cada una de ellas el término general por el método "Diferencias finitas".

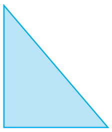
1. 19, 28, 37, 46, 55, ...
2. 3, 5, 7, 9, 11, ...
3. 4, 7, 10, 13, 16, ...

e. Selecciono la estrategia que debo utilizar y resuelvo:

1. Antonio realiza un recorrido de su casa hasta una ciudad vecina en bicicleta. Si en la primera hora recorre 15 km, en la segunda hora 12 km y así sucesivamente, en PA, ¿a qué distancia de su casa se encuentra la ciudad si llega en 5 horas?
2. Pedro se puso a trabajar en bordados aopo'i y aprendió rápido. El primer día hizo 2 servilletas, el segundo 4, el tercer día 8 y así sucesivamente. ¿Cuántas servilletas bordará el 7º día?

f. Resuelvo las siguientes situaciones problemáticas y verifico con mi grupo.

1. La suma de los ángulos de un cuadrilátero está en PA y uno de ellos mide 120º. Calculo la medida de los otros ángulos. (Recuerdo que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero mide 360º).
2. Calculo los lados de un triángulo rectángulo, sabiendo que sus medidas están en PA de razón 3.



3. Tres números están en PA; el producto de ellos da 66 y la suma 18. Calculo los tres números. (La progresión está dada por: x – r; x; x + r).
4. Un cuerpo cae libremente recorriendo 3m en el primer segundo, 8m en el segundo, y así sucesivamente en PA. Si tarda 5 segundos en llegar al suelo, ¿de qué altura cayó?
5. Las pérdidas de 5 años de un negocio están en PA. El último año perdió U$S 5 000 y la pérdida de cada año fue de U$S 500 menos que el año anterior. ¿Cuánto perdió en los 5 años?
6. Sara compra para su madre un terreno a crédito, pagadero en 5 años. El primer año paga U$S 5 000. Si cada año paga 10% más que el año anterior, calculo:
   - ¿Cuánto pagará en el 5º. año?
   - ¿Cuál es el importe del terreno?

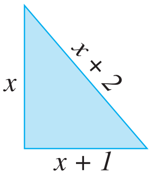
g. Luego de resolver estos problemas, digo qué pasos utilizados me facilitaron la solución de los mismos.

1. La suma del primero y segundo término de una PA finita es 6 y el producto de sus tres primeros términos es 64. Hallo dichos números.
2. ¿En qué monto se convertirán ₲ 800 000 colocados al 16% de interés compuesto anual en 6 años?
3. ¿Qué capital inicial prestado al 10% de interés compuesto durante 6 años se convertirá en ₲12 400 927?
4. Don Carlos ahorra ₲ 18 000 000 anuales que deposita en un banco cada 2 de enero. ¿Qué capital tendrá al cabo de 7 años si está impuesto al 18% anual de interés compuesto?
5. Para dentro de 3 años Carla necesita ahorrar ₲ 15 000 000 para hacer un viaje de estudios. ¿Qué capital debe depositar anualmente en un banco que paga un interés compuesto del 13% anual?

13 Autoevaluación

a. Verifico mis avances: ¿Son correctos los resultados obtenidos? ¿Qué procedimientos seguí? ¿De qué otra manera los puedo resolver?

1. Calculo los lados de un triángulo rectángulo, sabiendo que sus medidas están en PA. (Aplico el teorema de Pitágoras para hallar x).



Descubro el resultado correcto:

A) 15, 20, 25

B) 3, 4, 5

C) 6, 8, 10

D) 9, 12, 15

E) 1, 2, 3

2. Doña Matilde ahorra cada mes U$S 50 más que el mes anterior. En 10 años sus ahorros suman U$S 3 690. ¿Cuánto ahorró el primer mes? ¿Y el último mes?

3. La familia González ahorra cada año el triple de lo que ahorró el año anterior. Si en el 5.º año ahorró ₲ 24 300 000, ¿cuánto ha ahorrado en los 5 años?

4. Hallo cuatro números en progresión geométrica sabiendo que la suma de los dos primeros es 32 y la suma de los dos últimos 288.

5. La secuencia (2, $\frac{7}{3}$, ...) es una progresión aritmética. Determino la razón y el tercer término de esa progresión.

RESUMIMOS

Sucesiones

Finita: Secuencia ordenada de elementos de un conjunto con un número finito de términos $a_1; a_2; a_3; a_4;... a_n$

Infinita: Secuencia ordenada de elementos de un conjunto con infinitos términos $a_1; a_2; a_3; a_4;...$

Progresiones

Aritmética: Sucesión de números en donde existe una diferencia común entre sus términos que se llama razón y es además constante.

Geométrica: Toda sucesión de números en la cual cada término se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad constante denominada razón de la progresión.

Interpolación

Aritmética: Interpolar medios aritméticos entre dos números consiste en formar una PA, en la cual los dos números dados son los términos primero y último.

Geométrica: Interpolar medios geométricos entre dos números consiste en formar una PG en la cual los dos números dados son los términos primero y último.