UNIDAD

1 Funciones trigonómetricas

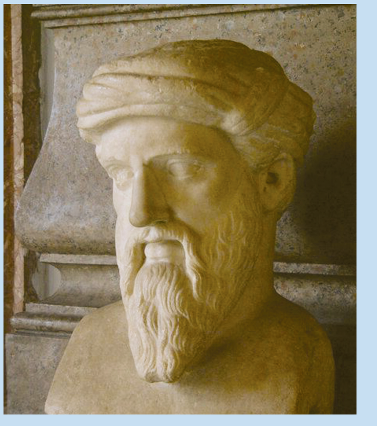
Capacidades

Aplica fórmulas trigonométricas en el cálculo de funciones trigonométricas de distintos valores de ángulos.

- Seno, coseno y tangente de la suma y diferencia de ángulos.
- Seno, coseno y tangente del doble de un ángulo.
- Seno, coseno y tangente de la mitad de un ángulo.

Alrededor del siglo IV a.C. la Matemática comenzó a desarrollarse de forma organizada. Tenemos conocimiento de que, todavía antes de esa época, existían pueblos, como los egipcios y babilonios, que usaban matemática para resolver problemas que se presentaban en sus comunidades. Más, sus fórmulas descubiertas a través de experiencias, no siempre eran correctas.

Ese desarrollo organizado de la Matemática tuvo su origen en la antigua Grecia debido, en especial, al descubrimiento de dos genios, Tales y Pitágoras.



Pitágoras, matemático griego, siglo VI a.C. Busto del filósofo Pitágoras de Samos, Roma, Museo Capitolino.

Fuente: http./greciaantigua.org/img/esc/i027.asp

Pitágoras (585-500 a.C.).

Filosofo griego, nació en Samos y murió en Metaponte. Fundó la secuela de Crotona, una sociedad secreta de tipo político-religioso, que contribuyó al desarrollo de la Aritmética, del Álgebra y la Geometría.

Pitágoras, fue el primero en acomodar las especulaciones filosóficas, los conceptos fundamentales de la matemática. Hizo del número el principio universal por excelencia. A él y a sus discípulos, los pitagóricos, se debe el uso sistemático de la tabla de multiplicar, el estudio de los números primos y compuestos, el método de extracción de raíces, etc. Y sobre todo, el famoso Teorema de Pitágoras sobre los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo.

Fuente: Baldor, 2001

1.1 Los números reales

Iniciamos el estudio de esta unidad abordando el tema sobre el conjunto de los números reales por considerar que los principales objetivos de la matemática se relacionan con los números y las figuras geométricas.

A lo largo del estudio de la matemática hemos ido operando en los diferentes campos numéricos, como se ilustra en estas páginas.

Analizamos la siguiente situación.

- La empresa "Los Laureles" debe comprar agua destilada y fraccionar en botellas de 1 litro para la venta. El proveedor enviará un tanque en forma de cubo con un volumen de 1000 m^3 de agua, que se colocará en un soporte.

  El tanque debe estar a una altura que permita la carga de las botellas por gravedad. La dueña de la empresa desea saber:

  a) La medida de la artista para construir un soporte del tamaño apropiado para subir el tanque.

  b) La medida de la diagonal de las caras del tanque, porque necesitan colocar bandas plásticas de colores para identificar el producto que contiene.

* Comprendemos el problema.

El volumen del tanque es: $V = 1000\ m^3$.

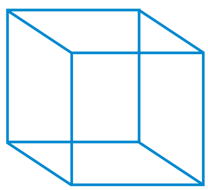
Queremos conocer la arista del tanque.

* **Concebimos un plan de solución.**

- Calculamos la arista, despejando de la fórmula de volumen.
- Calculamos la diagonal usando la fórmula de Pitágoras.

* **Ejecutamos el plan.**

- Cálculo de la arista del cubo:



$V = a^3 \quad a = \sqrt[3]{V}$

$a = \sqrt[3]{1000 \text{ m}^3} = 10 \text{ m}$

$a = 10$ m → número racional

Averiguamos en la biblioteca las características del agua destilada y su uso.

- Luego:

La medida de la arista del cubo es 10m.

- Cálculo de la diagonal de las caras del tanque.

- Aplicamos la fórmula de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$
- En nuestro caso tenemos… $d^2 = a^2 + a^2 \rightarrow d = \sqrt{a^2 + a^2} \rightarrow d = \sqrt{2a^2}$; $d = a\sqrt{2}$
- Remplazamos… $d = 10\sqrt{2}$ → número irracional
- Luego:

La medida de la diagonal de las caras del tanque es $10\sqrt{2}$ m.

* **Examinamos la solución obtenida usando la calculadora.**

- Analizamos la siguiente situación:

Aplicando el Teorema de Pitágoras, calculamos la medida de la diagonal de los cuadradros de lados 1m y 2m.

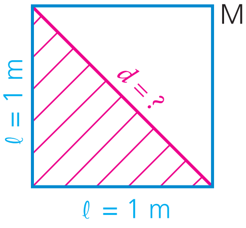
a) Cuadrado M: lado (ℓ) = 1 m

* **Comprendemos el problema.**

- ¿Qué datos proporciona el problema y qué pide que se calcule?

Leemos el problema, extraemos los datos y la incógnita y trazamos la figura:

- Tenemos como dato la medida del lado del cuadrado: $\ell = 1$ m
- La incógnita es la diagonal (d) del cuadrado
- Trazamos la figura:



* **Concebimos un plan de solución.**

- ¿Qué se puede hacer para resolver el problema?
  - Observamos la figura del cuadrado y vemos que sus dos lados junto con la diagonal, forman un triángulo rectángulo.
  - Los lados son los catetos del triángulo rectángulo.
  - La diagonal del cuadrado es la hipotenusa.
  - Para resolver el problema podemos aplicar la fórmula de Pitágoras:

* **Ejecutamos el plan.**

- Resolvemos el problema

$$a^2 = b^2 + c^2. \text{ O sea,}$$

$$d^2 = \ell^2 + \ell^2$$

- Reemplazamos: $d^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 \rightarrow d^2 = 2$
- Despejamos "d". $= \sqrt{2}$ m...número irracional
- Luego:

La diagonal del cuadrado mide $\sqrt{2}$ m

- Teorema de Pitágoras.

"En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos".

$a^2 = b^2 + c^2$

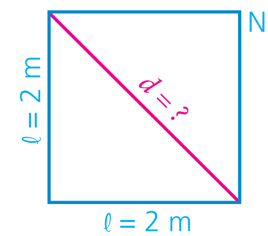
a = hipotenusa

b y c = catetos

* **Examinamos la solución obtenida.**

¿Es correcta la solución obtenida? Justificamos la respuesta.

b) Cuadrado N: lado $\ell = 2$m



* **Comprendemos el problema.**

Leemos el problema, extraemos los datos y la incógnita y trazamos la figura.

- Dato: lado del cuadrado $\ell = 2$m
- Incógnita: la diagonal del cuadrado d = ?
- Trazamos la figura:

Escala 1m: 1,5 cm

* **Concebimos un plan de solución.**

Veamos qué hacer para resolver el problema.

- Observamos la figura del cuadrado y vemos que sus lados, junto con la diagonal, forman un triángulo rectángulo.
- Los lados son los catetos del triángulo rectángulo.
- La diagonal del cuadrado es la hipotenusa.
- Para resolver el problema vamos a aplicar la fórmula de Pitágoras.

* **Ejecutamos el plan.**

$$a^2 = b^2 + c^2. \text{ O sea,}$$

$$d^2 = \ell^2 + \ell^2$$

- Reemplazamos: $d^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8 \rightarrow d^2 = 8$
- Despejamos "d".

$d = \sqrt{8} \rightarrow$ d = $2\sqrt{2}$ m $\rightarrow$ número irracional

- Luego:

La diagonal del cuadrado mide $2\sqrt{2}$ m

* **Examinamos la solución obtenida.**

Describimos el procedimiento que seguimos para resolver el problema.

De acuerdo a los resultados obtenidos en los problemas anteriores podemos concluir que el campo de los números reales está constituido por:

- El conjunto de números naturales: es el que nos sirve para designar la cantidad de elementos que tiene un conjunto.

  Se representa por: N = {0, 1, 2, 3,...}.

  Algunas características importantes son:

  - Este conjunto tiene un primer elemento, el cero.
  - Cada número natural tiene un siguiente único, que no es ninguno de los anteriores.
  - Es un conjunto infinito.
- El conjunto de números enteros: es el conjunto formado por los números naturales y los opuestos a los naturales distintos del cero. Se representa por: Z = {...−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3,...}
- El conjunto de los números irracionales: es el conjunto de todos los números que nunca pueden escribirse como fracción. Se representa por Q'.

Una fracción $\frac{a}{b}$ da lugar a un número decimal que puede ser finito, infinito y periódico.

EJEMPLOS

Decimal finito

$\frac{8}{5} = 1{,}6$

Con un número finito de cifras decimales.

Decimal periódico

$\frac{10}{3} = 3{,}33...$ $\frac{64}{15} = 4{,}2666...$

Con infinitas cifras, pero con un grupo que se repite indefinidamente (el periodo).

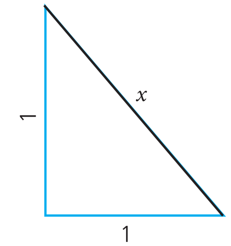
- El conjunto de números racionales: es el conjunto de todos los números que pueden escribirse como fracción. Se representa por Q.

Analizamos la siguiente situación:

¿Será que todo número positivo posee una raíz cuadrada?

La respuesta es: sí.

- Veamos el siguiente ejemplo. Consideramos un triángulo rectángulo con catetos iguales a 1 y tratamos de calcular su hipotenusa.



- **Resolvemos aplicando el Teorema de Pitágoras:** En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$x^2 = 1^2 + 1^2$$
$$x^2 = 1 + 1$$
$$x^2 = 2$$

- Ya sabemos que esa ecuación tiene dos soluciones: una positiva y otra negativa. O sea:

$$\boxed{x = \pm\sqrt{2}}$$

- Pero, como x es una longitud, entonces se representa por un número positivo.

Luego: $\boxed{x = \sqrt{2}}$

- Tenemos entonces que x es la raíz cuadrada de 2. Pero, ¿qué número es ese?
- Sabemos que existe porque observamos su representación en la figura del triángulo. Vamos a ver que, en este caso, el número sólo puede ser determinado aproximadamente.

- Hagamos entonces algunas tentativas.

  $(1{,}2)^2 = 1{,}44$ ... es menor que 2
  $(1{,}3)^2 = 1{,}69$ ... es menor que 2
  $(1{,}4)^2 = 1{,}96$ ... es menor que 2, pero es más próximo
  $(1{,}5)^2 = 2{,}25$ ... es mayor que 2

Concluimos que 1,4 es una aproximación por defecto de $\sqrt{2}$, o sea, es el valor próximo pero es menor que el que buscamos. Vamos entonces a aumentar una cifra decimal más al 1,4 para seguir nuestras tentativas.

$(1{,}41)^2 = 1{,}988$ ... es menor que 2

$(1{,}42)^2 = 2{,}0164$ ... es mayor que 2

También concluimos que 1,41 es una aproximación por defecto de $\sqrt{2}$, mejor que la anterior. Podemos continuar intentando encontrar una cifra decimal más.

$(1{,}413)^2 = 1{,}9966$ ... es menor que 2

$(1{,}414)^2 = 1{,}9994$ ... es menor que 2

$(1{,}415)^2 = 2{,}0022$ ... es mayor que 2

Tenemos entonces que 1,414 es una aproximación todavía mejor para $\sqrt{2}$. Este proceso puede seguir, pero, nunca lograremos encontrar un número decimal cuyo cuadrado sea exactamente 2. Todo lo que podemos hacer es encontrar aproximaciones cada vez mejores para el valor de $\sqrt{2}$.

Una máquina de calcular común, con una tecla de raíz cuadrada, realiza eso muy bien. Apretando las teclas $\boxed{2}$ y $\boxed{\sqrt{\ }}$ encontramos en el visor el número 1,4142135, que es una excelente aproximación para la raíz cuadrada de 2.

Números irracionales, son aquellos números con infinitas cifras decimales (no periódicas) y que solo podemos conocer por medio de aproximaciones. Los mismos no pueden ser expresados como fracción.

Ejemplo: Las raíces cuadradas de los números que no son cuadrados perfectos, como, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, etc.

A continuación tenemos el esquema sobre el conjunto de los números reales.

- Los números reales están formados por los números racionales y los irracionales.

Sintetizando:

- **Reales** (R)
  - **Racionales** (Q)
    - **Enteros** (Z) — positivos; negativos y el 0.
    - Decimales finitos
    - Decimales infinitos (periódicos) — positivos; negativos y el 0.
  - **Irracionales** (Q')
    - Decimales infinitos (no periódicos) — positivos y negativos

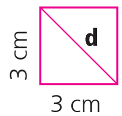
Actividades de fijación

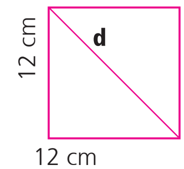
a. Clasifico los siguientes números en racionales e irracionales y justifico mi respuesta.

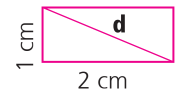
1) $\frac{3}{4}$ **3)** $\sqrt{3}$ **5)** 0,10888...

2) 25 **4)** 3,24141... **6)** $\sqrt{5}$

b. Utilizo el Teorema de Pitágoras para calcular las diagonales de las siguientes figuras y determino cuáles de las respuestas son números racionales y cuáles irracionales.

1) 

2) 

3) 

1.2 Funciones trigonométricas de la suma o diferencia de dos ángulos, ángulo duplo, ángulo medio

1.2.1. Seno y coseno de la suma de dos ángulos

Al estudiar la suma de dos ángulos, debemos cuidar de no confundir la función trigonométrica de la suma de dos ángulos con la suma de dos funciones trigonométricas. Es decir, no es lo mismo operar con $sen\ (a + b)$, que con $sen\ a + sen\ b$. Lo mismo sucede para las demás funciones: $cos\ (a + b) \neq cos\ a + cos\ b$...

EJEMPLO:

- Comparamos los valores de:

$$sen\ (30° + 60°) = sen\ 90° = 1$$

$$sen\ 30° + sen\ 60° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

- Concluimos que: $sen\ (30° + 60°) \neq sen\ 30° + sen\ 60°$ → (No se cumple la propiedad transitiva de la igualdad.)

1.2.1.1. Veamos ahora cómo podemos expresar el seno de la suma de dos ángulos

El seno de la suma de dos ángulos se indica: $sen\ (a + b)$, siendo a y b los ángulos. Vamos a buscar una fórmula para hallarlo. Representamos los ángulos a y b en un sistema de ejes coordenados.

Trazamos $\overline{PM}$ y $\overline{QN}$ perpendiculares al eje x desde P y Q respectivamente.

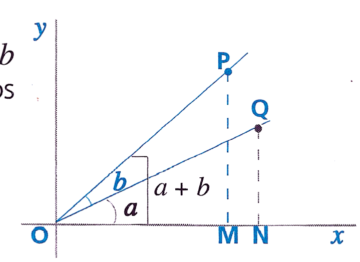


Figura 1.1.

COMPLETAMOS EL DIBUJO ANTERIOR ASÍ:

- trazamos $\overline{PQ}$ de manera que sea perpendicular a $\overline{OQ}$.
- trazamos $\overline{LQ}$ paralelo al eje x.

Se forma el $\measuredangle LPQ$ al que llamamos $\measuredangle a$ porque tiene la misma medida del ángulo a inicial (tienen lados perpendiculares; $\overline{PM} \perp$ al eje "x" y $\overline{PQ} \perp \overline{OQ}$).

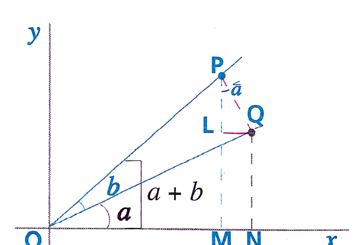


Figura 1.2.

Según la figura 1.2.

Los segmentos de paralelas entre paralelas son iguales.

$$sen\,(a+b)=\frac{\overline{PM}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{PL}+\overline{LM}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{PL}+\overline{QN}}{\overline{OP}}=\frac{\overbrace{\overline{PQ}\,.\,cos\,a}^{A}+\overbrace{\overline{OQ}\,.\,sen\,a}^{B}}{\overline{OP}}$$

Factor común

$$=\frac{\overbrace{\overline{OP}\,sen\,b\,.\,cos\,a}^{C}+\overbrace{\overline{OP}\,.\,cos\,b}^{D}\,.\,sen\,a}{\overline{OP}}=\frac{\cancel{\overline{OP}}\,.\,(sen\,b\,.\,cos\,a+cos\,b\,.\,sen\,a)}{\cancel{\overline{OP}}}$$

A) En el $\widehat{PLQ}$: $cos\,a=\dfrac{\overline{PL}}{\overline{PQ}}$ $\quad \overline{PL}=\overline{PQ}.cos\,a$

B) En el $\widehat{OQN}$: $sen\,a=\dfrac{\overline{QN}}{\overline{OQ}}$ $\quad \overline{QN}=\overline{OQ}.sen\,a$

C) En el $\widehat{OPQ}$: $sen\,b=\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}$ $\quad \overline{PQ}=\overline{OP}.sen\,b$

D) Y también en $\widehat{OPQ}$: $cos\,b=\dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}$ $\quad \overline{OQ}=\overline{OP}.cos\,b$

Ordenamos y tenemos:

$$\boxed{sen\,(a+b)=sen\,a\,.\,cos\,b+cos\,a\,.\,sen\,b}$$

1.2.1.2. Observando nuevamente la figura 1.2 podemos escribir.

Son segmentos de paralelas entre paralelas.

$$cos\,(a+b)=\frac{\overline{OM}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{ON}-\overline{MN}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{ON}-\overline{LQ}}{\overline{OP}}=\frac{\overbrace{\overline{OQ}\,.\,cos\,a}^{A}-\overbrace{\overline{PQ}\,.\,sen\,a}^{B}}{\overline{OP}}=$$

Factor común

$$=\frac{\overbrace{\overline{OP}\,.\,cos\,b}^{C}\,.\,cos\,a-\overbrace{\overline{OP}\,.\,sen\,b}^{D}\,.\,sen\,a}{\overline{OP}}=\frac{\cancel{\overline{OP}}\,(cos\,b\,.\,cos\,a-sen\,b\,.\,sen\,a\,)}{\cancel{\overline{OP}}}=$$

A) En el $\widehat{OQN}$: $cos\,a=\dfrac{\overline{ON}}{\overline{OQ}}$ $\quad \overline{ON}=\overline{OQ}.cos\,a$

B) En el $\widehat{PLQ}$: $sen\,a=\dfrac{\overline{LQ}}{\overline{PQ}}$ $\quad \overline{LQ}=\overline{PQ}.sen\,a$

C) En el $\widehat{OPQ}$: $cos\,b=\dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OQ}}$ $\quad \overline{OQ}=\overline{OP}.cos\,b$

D) También en $\widehat{OPQ}$: $sen\,b=\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}}$ $\quad \overline{PQ}=\overline{OP}.sen\,b$

Ordenamos y tenemos:

$$\boxed{cos\,(a+b)=cos\,a\,.\,cos\,b-sen\,a\,.\,sen\,b}$$

Si se conoce el ángulo α, o se supiera en qué cuadrante termina, quedaría definido el signo correspondiente a sus razones trigonométricas, con el cual desaparecería la ambigüedad con respecto al signo.

EJEMPLOS:

a) Siendo $sen\ a = \frac{1}{5}$ y $cos\ b = \frac{2}{3}$; hallamos $sen\ (a + b)$.

- Escribimos la fórmula: $sen\ (a + b) = sen\ a\ .\ cos\ b + cos\ a\ .\ sen\ b$
- Notamos que para aplicarla faltan los datos: $cos\ a$ y $sen\ b$.
- Reemplazamos:

$$sen\ (a + b) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{25}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{15} + \frac{\sqrt{125}}{15}$$

$$= \boxed{\frac{2 + 5\sqrt{5}}{15}}$$

Calculamos los elementos que faltan mediante las fórmulas fundamentales.

$cos\ a = \sqrt{1 - sen^2\ a}$

$cos\ a = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{25 - 1}{25}} = \boxed{\frac{\sqrt{24}}{5}}$

$sen\ b = \sqrt{1 - cos^2\ b}$

$sen\ b = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9 - 4}{9}} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{3}}$

- Se utilizan sólo los valores positivos porque $\measuredangle a$ y $\measuredangle b$ son del primer cuadrante. Todas las funciones trigonométricas de ángulos del primer cuadrante son positivas.

$$sen\ a = \frac{1}{5} = 0{,}2 \quad ; \quad \measuredangle a = 48°\ 11'\ 13''$$

$$cos\ b = \frac{2}{3} = 0{,}666666666 \quad ; \quad \measuredangle b = 48°\ 11'\ 22''$$

- Luego: $\measuredangle a$ y $\measuredangle b$ son ángulos del primer cuadrante.

b) **Hallamos sen 75° usando los valores exactos de las funciones trigonométricas de 45° y 30°.**

- Escribimos la fórmula $sen\ (a + b) = sen\ a\ .\ cos\ b + cos\ a\ .\ sen\ b$

$$sen\ 75° = sen\ (45° + 30°) = sen\ 45°\ .\ cos\ 30° + cos\ 45°\ .\ sen\ 30°$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

1.2.2 Seno y coseno de la diferencia de dos ángulos

1.2.2.1. Para hallar las fórmulas de $sen\ (a - b)$ y cos $(a - b)$ simplemente debemos cambiar en las dos últimas fórmulas el ángulo b por su opuesto $-b$, de acuerdo a lo que estudiamos anteriormente sobre ángulo simétrico o negativo.

O sea:

$$sen\ (a - b) = sen\ a\ .\ cos\ (-b) + cos\ a\ .\ sen\ (-b)$$

Según la relación de ángulos simétricos o negativos,
$cos\ (-b) = cos\ b$ y $sen\ (-b) = -\ sen\ b$

Reemplazamos en:

$$\boxed{sen\ (a - b) = sen\ a\ .\ cos\ b - cos\ a\ .\ sen\ b}$$

1.2.2.2. Y también:

$$cos\,(a-b) = cos\,a \,.\, cos\,(-b) - sen\,a \,.\, sen\,(-b)$$

Reemplazamos las funciones de "– b" por las de su simétrico:

$$\boxed{cos\,(a-b) = cos\,a \,.\, cos\,b + sen\,a \,.\, sen\,b}$$

$cos\,(-b) = cos\,b$ y
$sen\,(-b) = sen\,b$
(por ángulos negativos)

EJEMPLOS:

a) Sabemos que $cos\,a = \frac{5}{13}$ y $cos\,b = \frac{3}{5}$, calculamos $cos\,(a-b)$.

- Escribimos la fórmula: $cos\,(a-b) = cos\,a \,.\, cos\,b + sen\,a \,.\, sen\,b$
- Observamos que para aplicarla faltan los datos: $sen\,a$ y $sen\,b$. por lo que primeramente se procede a calcularlos.
- Reemplazamos:

$$cos\,(a-b) = \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} + \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5}$$

$$= \frac{15}{65} + \frac{48}{65}$$

$$\boxed{cos\,(a-b) = \frac{63}{65}}$$

- Calculamos $sen\,a$ en función de $cos\,a$.

$$sen\,a = \sqrt{1-cos^2 a} = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{169-25}{169}}$$

$$sen\,a = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$$

- Calculamos $sen\,b$ en función de $cos\,b$.

$$sen\,b = \sqrt{1-cos^2 b} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}}$$

$$sen\,b = \sqrt{\frac{25-9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

b) Hallar sen 15° usando los valores exactos de las funciones trigonométricas de 45° y 30°.

$$sen\,15° = sen\,(45° - 30°)$$

- Usamos la fórmula: $sen\,(a-b) = sen\,a \,.\, cos\,b - cos\,a \,.\, sen\,b$

$$sen\,15° = sen\,(\underset{a}{45°} - \underset{b}{30°}) = sen\,45° \,.\, cos\,30° - cos\,45° \,.\, sen\,30°$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

Actividades de fijación

a. **Luego de desarrollar todas las actividades propuestas, verifico los resultados, compruebo todo el proceso de resolución y explico en plenaria los procedimientos que seguí.**

1) Dados $cos\,a = \frac{4}{5}$ y $sen\,b = \frac{12}{13}$, calculo $cos\,(a+b)$.

2) Siendo $sen\,a = \frac{1}{4}$ y $sen\,b = \frac{1}{3}$, hallo $sen\,(a-b)$.

3) Encuentro cos 75° usando los valores exactos de las funciones de 45° y 30°.

4) Determino sen 135° considerando 135° como la suma de 90° y 45°. Uso valores exactos.

5) Demuestro que $sen\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ considerando 60° como la diferencia entre 90° y 30°. Uso valores exactos.

6) Hallo $sen\,(a-b)$ sabiendo que $sec\,a = 2$ y $cotg\,b = \frac{3}{2}$.

7) Determino $cos\ (a + b)$ sabiendo que $tg\ a = 3$ y $tg\ b = 4$.

8) Demuestro que $sen\ 90° = 1$, considerando $90°$ como la suma de $60°$ y $30°$.

b. Deduzco las fórmulas de:

1) $tg\ (a + b)$

2) $tg\ (a - b)$

c. Formulo situaciones en las que tenga que utilizar las fórmulas deducidas en **b.** y las resuelvo.

1.2.3. Seno y coseno del ángulo doble

1.2.3.1. Seno del ángulo doble

Si en lugar de hacer el $sen\ (a + b)$ hiciéramos el seno de la suma de dos ángulos iguales, es decir el $sen\ (a + a)$ tendríamos el seno del ángulo doble de a.

O sea:

$sen\ (a + a) = sen\ a\ .\ cos\ a + cos\ a\ .\ sen\ a$, que ordenamos y tenemos

$sen\ 2a = sen\ a\ .\ cos\ a + sen\ a\ .\ cos\ a$, dos veces la misma expresión.

Luego:

$$\boxed{sen\ 2a = 2\ .\ sen\ a\ .\ cos\ a}$$

1.2.3.2. Coseno del ángulo doble

También en la fórmula de $cos\ (a + b)$ podemos considerar a y b iguales y tenemos:

$$cos\ (a + a) = cos\ a.\ cos\ a - sen\ a\ .\ sen\ a$$

$$\boxed{cos\ 2a \quad = \quad cos^2\ a \quad - \quad sen^2\ a}$$

- Si queremos $cos\ 2\ a$ en función del $cos\ a$:
- Sustituimos: $sen^2\ a = 1 - cos^2\ a$
- Tenemos $cos\ 2\ a = cos^2\ a - (1 - cos^2\ a) \rightarrow cos^2\ a - 1 + cos^2\ a$
- Luego: $\boxed{cos\ 2\ a = 2\ cos^2\ a - 1}$

1.2.4. Seno y coseno del ángulo mitad

Faltaría determinar las funciones trigonométricas del ángulo que es la mitad de otro. Si un ángulo es " a " su mitad es "$\frac{a}{2}$" y por lo tanto "a" es el doble de "$\frac{a}{2}$".

1.2.4.1. Coseno del ángulo mitad

Cálculo del $\cos\frac{a}{2}$ a partir de la fórmula fundamental.

Por la fórmula fundamental, la suma de los cuadrados del seno y del coseno de cualquier ángulo es igual a 1.

$$sen^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{a}{2} = 1 \text{ --- } A$$

- Por otro lado, según la fórmula del coseno del ángulo doble: .... $\cos^2\frac{a}{2} - sen^2\frac{a}{2} = \cos a \text{ --- } B$

- Sumamos A y B y tenemos: ....

$$\cancel{sen^2\frac{a}{2}} + \cos^2\frac{a}{2} = 1$$

$$\cos^2\frac{a}{2} - \cancel{sen^2\frac{a}{2}} = \cos a$$

- Efectuamos: .... $2.\cos^2\frac{a}{2} = 1 + \cos a$

- Pasamos 2 como divisor: .... $\cos^2\frac{a}{2} = \frac{1+\cos a}{2}$

- Hallamos raíz cuadrada de ambos miembros: .... $\sqrt{\cos^2\frac{a}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$

$$\boxed{\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}}$$

Otro procedimiento para calcular $\cos\frac{a}{2}$.

- Escribimos la fórmula del coseno del ángulo duplo:

  $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

- Transponemos términos $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$
- Despejamos $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
- Reemplazamos $2x = a$, tenemos $x = \frac{a}{2}$, luego

  $\cos^2\frac{a}{2} = \frac{1+\cos a}{2}$

- Hallamos la raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad y queda:

$$\boxed{\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}}$$

1.2.4.2. Seno del ángulo mitad

Cálculo del $sen\ \frac{a}{2}$ a partir de la fórmula fundamental.

- Escribimos nuevamente las igualdades A y B: $sen^2\frac{a}{2} + cos^2\frac{a}{2} = 1$ — A

  $cos^2\frac{a}{2} - sen^2\frac{a}{2} = cos\ a$ — B

- Las restamos cambiando los signos al sustraendo:

$$sen^2\frac{a}{2} + \cancel{cos^2\frac{a}{2}} = 1$$
$$-\cancel{cos^2\frac{a}{2}} + sen^2\frac{a}{2} = -cos\ a$$

- Efectuamos: $2\ sen^2\frac{a}{2} = 1 - cos\ a$

- Pasamos el coeficiente "2" como divisor: $sen^2\frac{a}{2} = \frac{1 - cos\ a}{2}$

- Hallamos la raíz cuadrada en ambos miembros:

$$\sqrt{sen^{\cancel{2}}\frac{a}{2}} = \sqrt{\frac{1 - cos\ a}{2}}$$

$$\boxed{sen\ \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\ a}{2}}}$$

Otro procedimiento para calcular $sen\ \frac{a}{2}$.

- Escribimos la fórmula del coseno del ángulo duplo:

  $cos\ 2x = 2\ cos^2 x - 1 = 2\ (1 - sen^2 x) - 1 = 2 - 2\ sen^2 x - 1$, luego
  $cos\ 2x = 1 - 2\ sen^2 x$

- Transponemos términos $2sen^2 x = 1 - cos\ 2x$

- Despejamos $sen^2 x = \frac{1 - cos\ 2x}{2}$

- Reemplazamos, $2x = a$, tenemos $x = \frac{a}{2}$, luego

  $sen^2\frac{a}{2} = \frac{1 - cos\ a}{2}$

- Hallamos la raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad y queda:

$$\boxed{sen\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\ a}{2}}}$$

EJEMPLOS:

a) Siendo $sec\ a = -\frac{5}{4}$, hallamos $sen\ 2a$, sabiendo que "a" es un ángulo del segundo cuadrante.

- Escribimos la fórmula: $sen\ 2a = 2\ sen a . cos\ a$
- Reemplazamos en la fórmula:

$$sen\ 2a = 2.\frac{3}{5}.(-\frac{4}{5}) = -\frac{24}{5}$$

- Luego: $\boxed{sen\ 2a = -\frac{24}{5}}$

Calculamos los elementos que faltan y aplicamos a las funciones los signos que les corresponden en el II cuadrante.

Si $sec\ a = -\frac{5}{4}$

podemos hallar $cos\ a$ que es su recíproca:

$$cos\, a = -\frac{4}{5}$$

Calculamos $sen\ a$ por la fórmula fundamental:

$$sen\ a = \sqrt{1 - cos^2\ a}$$

$$sen\ a = \sqrt{1-(-\frac{4}{5})^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} =$$

$$= \sqrt{\frac{25-16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}}$$

$= \boxed{\frac{3}{5}} \rightarrow$ (positivo en el II cuadrante)

b) Calculamos el $sen\ 15°$ considerando $15°$ como la mitad de $30°$. Usamos valores exactos.

$$sen\ 15° = sen\ \frac{30°}{2} \quad a$$

- Usamos la fórmula: $sen\ \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ a}{2}}$

$$sen\ 15° = sen\ \frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1-cos\ 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\frac{2}{1}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

- Luego: $\boxed{sen\ 15° = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$

Actividades de fijación

a. Leo las actividades propuestas, establezco las estrategias para resolverlas, verifico los resultados y enuncio los pasos que seguí.

1) Hallo $sen\ 2a$ y $cos\ 2a$ sabiendo que $cosec\ a = \frac{7}{3}$, siendo "a" del primer cuadrante.

2) Calculo $sen\ \frac{b}{2}$ y $cos\ \frac{b}{2}$ sabiendo que $sen\ b = -\frac{2}{5}$ y b es un ángulo del tercer cuadrante.

3) Determino el valor de $sen\ 45°$ considerando $45°$ como la mitad de $90°$. Uso valores exactos.

4) Sabiendo que $sen\ a = -\frac{\sqrt{5}}{4}$, determino $sen\ 2a$ siendo "a" un ángulo del cuarto cuadrante.

5) Hallo $sen\ 22°\ 30'$ y $cos\ 22°\ 30'$ considerando el ángulo como la mitad de $45°$. Uso valores exactos.

6) Demuestro que $cos\ 120° = -\frac{1}{2}$ usando los valores exactos de las funciones de $60°$.

b. Deduzco las fórmulas de:

1) $tg\ 2a$

2) $tg\ \frac{a}{2}$

c. Formulo situaciones en las que tenga que utilizar las fórmulas deducidas en **b.** y las resuelvo.

1.3. Transformación en producto de la suma o diferencia de seno y coseno de dos ángulos

Frecuentemente es necesario transformar sumas o diferencias de funciones de ángulos en un producto, sobre todo para que ellos puedan ser simplificados.

Vamos a obtener las fórmulas llamadas de transformación en producto.

1.3.1. Transformación en producto de la suma de dos senos

- Primero escribimos las fórmulas del seno de la suma y el seno de la diferencia de ángulos obtenidos en los puntos **1.2.1**. y **1.2.2**.

$$\begin{array}{rcl} sen\,(a+b) & = & sen\,a.cos\,b + \cancel{cos\,a.sen\,b} \\ sen\,(a-b) & = & sen\,a.cos\,b - \cancel{cos\,a.sen\,b} \\ \hline sen\,(a+b) + sen\,(a-b) & = & \underbrace{sen\,a.cos b + sen\,a.cos b}_{\text{2 veces la misma expresión}} \end{array}$$

Sumamos miembro a miembro estas igualdades (los primeros entre sí y los segundos miembros entre sí).

$$sen\,\underbrace{(a+b)}_{p} + sen\,\underbrace{(a-b)}_{q} = 2.sen\,a.cos\,b \quad ⊛$$

Designamos "$a+b$" con la letra "p" y "$a-b$" con la letra "q".

En la igualdad indicada con ⊛ sustituimos todas las letras "***a***" y "***b***" en función de las letras "***p***" y "***q***".

- Tenemos así que: $a + b = p$
  $a - b = q$

- Sumamos miembro a miembro estas dos últimas igualdades y obtenemos el **valor de "*a*"** en función de "***p*** y ***q***".

$$\begin{array}{rcl} a + \cancel{b} & = & p \\ a - \cancel{b} & = & q \\ \hline 2a & = & p + q \end{array}$$

$$\boxed{a = \frac{p+q}{2}}$$

- Restamos miembro a miembro las igualdades anteriores (cambiando de signo al sustraendo) y obtenemos "***b***" en función de "***p*** y ***q***".

$$\begin{array}{rcl} \cancel{a} + b & = & p \\ -\cancel{a} + b & = & -q \\ \hline 2b & = & p - q \end{array}$$

$$\boxed{b = \frac{p-q}{2}}$$

- Luego:

$$\boxed{sen\,p + sen\,q = 2.sen\,\frac{p+q}{2}\,.\,cos\,\frac{p-q}{2}}$$

→ Esta fórmula transforma la suma de senos de ángulos en un producto.

1.3.2. Transformación en producto de la diferencia de dos senos

Escribimos nuevamente las fórmulas de $sen\ (a + b)$ y $sen\ (a - b)$

$$\begin{array}{rl} sen\ (a+b) = & \cancel{sen\ a.cos\ b} + cos\ a.sen\ b \\ -sen\ (a-b) = & -\cancel{sen\ a.cos\ b} + cos\ a.sen\ b \\ \hline sen\ (a+b) - sen\ (a-b) = & \underbrace{cos\ a.sen\ b + cos\ a.sen\ b}_{\text{2 veces la misma expresión}} \end{array}$$

Restamos miembro a miembro estas igualdades (cambiando los signos del sustraendo).

$$sen\ (a+b) - sen\ (a-b) = 2.cos\ a.sen\ b$$

- Escribimos las letras "***a*** y ***b***" en función de "***p*** y ***q***":

$$\boxed{sen\ p - sen\ q = 2.cos\ \frac{p+q}{2}\ .\ sen\ \frac{p-q}{2}}$$

Fórmula de transformación en producto de la diferencia de senos de ángulos.

1.3.3. Transformación en producto de la suma de dos cosenos

Ahora escribimos las fórmulas de $cos\ (a + b)$ y $cos\ (a - b)$ aprendidas en los puntos 1.2.1 y 1.2.2

$$\begin{array}{rl} cos\ (a+b) = & cos\ a.cos\ b - \cancel{sen\ a.sen\ b} \\ cos\ (a-b) = & cos\ a.cos\ b + \cancel{sen\ a.sen\ b} \\ \hline cos\ (a+b) + cos\ (a-b) = & \underbrace{cos\ a.cos\ b + cos\ a.cos\ b} \\ cos\ (a+b) + cos\ (a-b) = & 2.cos\ a.cos\ b \end{array}$$

Sumamos miembro a miembro.

- Escribimos "a y b" en función de "p y q"

$$\boxed{cos\ p + cos\ q = 2.cos\ \frac{p+q}{2}\ .\ cos\ \frac{p-q}{2}}$$

1.3.4. Transformación en producto de la diferencia de dos cosenos

Nuevamente escribimos las fórmulas de $cos\ (a + b)$ y $cos\ (a - b)$.

$$\begin{array}{rl} cos\ (a+b) = & \cancel{cos\ a.cos\ b} - sen\ a.sen\ b \\ -\ cos\ (a-b) = & -\cancel{cos\ a.cos\ b} - sen\ a.sen\ b \\ \hline cos\ (a+b) - cos\ (a-b) = & \underbrace{-\ sen\ a.sen\ b - sen\ a.sen\ b} \\ cos\ (a+b) - cos\ (a-b) = & -\ 2.sen\ a.sen\ b \end{array}$$

Restamos miembro a miembro.

- Escribimos "***a*** y ***b***" en función de "***p*** y ***q***":

$$\boxed{cos\ p - cos\ q = -\ 2.sen\ \frac{p+q}{2}\ .\ sen\ \frac{p-q}{2}}$$

1.3.5. Transformación en producto de la suma de dos tangentes

- Escribimos la igualdad:

$$tg\ p + tg\ q = \frac{sen\ p}{cos\ p} + \frac{sen\ q}{cos\ q}$$

- Efectuamos la suma: $tg\ p + tg\ q = \dfrac{sen\ p\ .\ cos\ q + sen\ q\ .\ cos\ p}{cos\ p\ .\ cos q}$

- Observamos que el numerador del segundo miembro es el desarrollo de sen $(p + q)$, luego:

$$\boxed{tg\ p + tg\ q = \frac{sen\ (p+q)}{cos\ p . cos q}}$$

1.3.6. Transformación en producto de la diferencia de dos tangentes

- Escribimos la igualdad:

$$tg\ p - tg\ q = \frac{sen\ p}{cos\ p} - \frac{sen\ q}{cos\ q} = \frac{sen\ p\ .\ cos\ q - sen\ q\ .\ cos\ p}{cos\ p\ .\ cos\ q}$$

- Efectuamos la sustracción y tenemos:

$$tg\ p - tg\ q = \frac{sen\ p\ .\ sen\ q - sen\ q\ .\ cos\ p}{cos\ p\ .\ cos\ q}$$

- Observamos que el numerador del segundo miembro es el desarrollo de *sen* $(p - q)$, luego:

$$\boxed{tg\ p - tg\ q = \frac{sen\ (p-q)}{cos\ p\ .\ cos\ q}}$$

EJEMPLOS:

Calculamos las expresiones mediante la transformación en productos, usando valores exactos de los ángulos notables.

a) $\underset{p}{\underset{\downarrow}{sen\ 60°}} + \underset{q}{\underset{\downarrow}{sen\ 30°}} = 2.sen\ \dfrac{60° + 30°}{2}\ .\ cos\ \dfrac{60° - 30°}{2}$

$= 2.sen\ \dfrac{90°}{2} .cos\ \dfrac{30°}{2}$

$= 2.sen\ 45°.cos\ 15°$ Ángulo notable

$= 2.\dfrac{\sqrt{2}}{2}.cos\ 15° = \boxed{\sqrt{2}.cos 15°}$ → Aquí ya se puede usar la calculadora.

VEAMOS CÓMO ENCONTRAR EL VALOR DE: $\sqrt{2}$. *cos* 15° CON EL USO DE LA CALCULADORA

Hagamos lo siguiente:

- Digitamos $\boxed{2}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ aparece en el visor $\boxed{1{,}414213562}$, seguimos digitando $\boxed{x}$ $\boxed{1}$ $\boxed{5}$ $\boxed{cos}$ = aparece en el visor $\boxed{1{,}366025404}$

- Luego: $\boxed{sen\ 60° + sen\ 30° \cong 1{,}37}$

b) $\cos 120° - \operatorname{sen} 30°$

A esta expresión no podemos aplicar ninguna de las fórmulas de transformación en producto porque están mezcladas las funciones seno y coseno. Para tener una sola función usamos la relación que dice: "el seno de un ángulo es igual al coseno del complemento y viceversa".

Cambiamos el ángulo más pequeño (de 30°) ya que podemos hallar su complemento.

$$\cos 120° - \cos 60° = -2.\operatorname{sen}\frac{120° + 60°}{2}\ .\ \operatorname{sen}\frac{120° - 60°}{2}$$

$$= -2.\operatorname{sen}\frac{180°}{2}\ .\ \operatorname{sen}\frac{60°}{2}$$

$$= -2.\operatorname{sen} 90°.\operatorname{sen} 30°$$

$$= -\cancel{2}.\ 1\ .\ \frac{1}{\cancel{2}} = -1$$

$$\boxed{\cos 120° - \cos 60° = -1}$$

c) $\dfrac{\operatorname{sen} 120° - \cos 30°}{\operatorname{sen} 120° + \cos 30°}$

- Reemplazamos sen 120° por su suplemento (Paso 1) y tenemos:

$$\frac{\operatorname{sen} 60° - \cos 30°}{\operatorname{sen} 60° + \cos 30°}$$

- Observamos cómo queda el ejercicio y vemos que en el numerador y denominador tenemos la diferencia de funciones trigonométricas distintas. Por lo tanto, no podemos aplicar la fórmula de la "transformación de la suma o diferencia de seno y coseno de dos ángulos".
- Para tener en el numerador y denominador la suma o diferencia de funciones trigonométricas iguales, usamos la relación de ángulos complementarios.
- Reemplazamos *sen* 60° por su complementario *cos* 30° (Paso 2) y obtenemos:

$$\frac{\cos 30° - \cos 30°}{\cos 30° + \cos 30°} = \frac{0}{2\cos 30°} = \frac{0}{\cancel{2}.\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}} = \frac{0}{\sqrt{3}} = 0$$

$$\boxed{\frac{\cos 30° - \cos 30°}{\cos 30° + \cos 30°} = 0}$$

Paso 1

- Como debemos usar los valores de los ángulos notables, tenemos que reducir *sen* 120° al primer cuadrante.
- Reducimos, usando la relación de ángulos suplementarios:

$$\operatorname{sen} 120° = \operatorname{sen}(180° - 120°)$$
$$= \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Paso 2

- Recurrimos a la relación de ángulos complementarios para convertir seno a coseno.
- Escribimos: $\operatorname{sen} 60° = \cos 30°$

Actividades de fijación

a. Simplifico mediante la transformación en producto. Uso valores exactos de los ángulos notables.

1) $sen\ 80° + sen\ 40°$

3) $cos\ 80° + cos\ 20°$

5) $cos\ 150° - sen\ 60°$

2) $sen\ 50° - sen\ 40°$

4) $sen\ 75° + cos\ 75°$

6) $cos\ 70° - cos\ 20°$

- Una vez desarrollados los ejercicios, examino los resultados y analizo el proceso seguido.

b. Formulo situaciones en las que tenga que utilizar las fórmulas $tg\,p + tg\,q$ y $tg\,p - tg\,q$ y las resuelvo.